Meccanica e Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
Esercitazioni del corso. Periodo I
Prof. Leonardo BERTINI
Ing. Ciro SANTUS

Esercitazione 03:
Sistemi di forze equilibrati

Indice

1 Definizione di sistema di forze equilibrato

Sia Σ un sistema di n forze $\vec{F}_i$ applicate nei punti P_i. Σ si dice equilibrato, se è equivalente ad un sistema di forze vuoto, ossia costituito da nessuna forza.
Evidentemente un sistema di forze è *equilibrato* se e solo se:

$$\vec{R} = 0 \tag{1}$$
$$\vec{M}_{\mathrm{Q}} = 0 \tag{2}$$

con Q polo di calcolo qualsiasi.
Un problema di notevole importanza tecnica è quello di determinare una o più forze *equilibranti* al sistema dato, ossia tali che il loro intervento renda il sistema complessivo equilibrato.
Nei problemi di questo tipo, è consuetudine quindi distinguere le forze note da quelle incognite (equilibranti). Un suggerimento pratico è quello di rappresentare le forze note con il verso corretto in modo che l'intensità coincida con il modulo di ciascuna forza, mentre per le forze incognite applicare un verso di tentativo, eventualmente invertito dal segno negativo dell'intensità risultante. Cercare di prevedere il verso delle forze equilibranti, al fine di non avere segno negativo, è un approccio poco efficiente e che può indurre in errori.

2 Equilibrio di tre forze nel piano

Nello schema di Fig.1 si mostra un sistema di tre forze contenute nel piano $(x - y)$. Delle tre forze $\vec{F}_1$ è nota, $\vec{F}_2$ è nota in direzione ma non la sua intensità ed infine $\vec{F}_3$ è incognita nel piano, quindi comporta due incognite.
Determinare le incognite affinché il sistema di forze sia equilibrato.

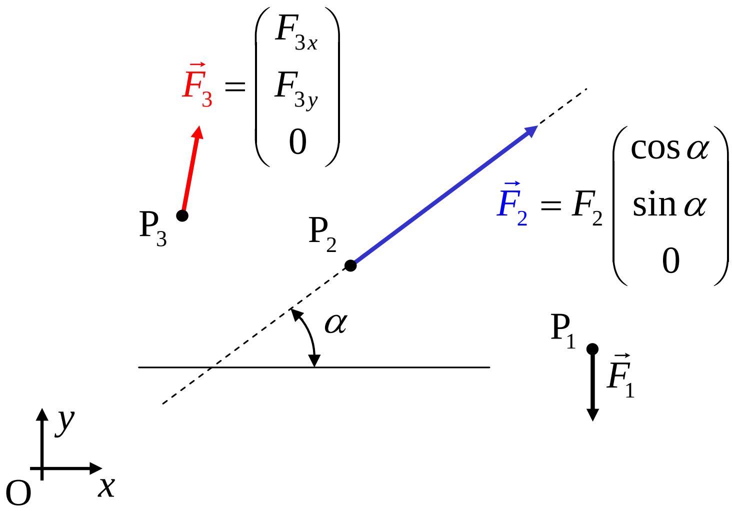

Figura 1: Sistema piano di tre forze.

Dati del problema:

$$\begin{aligned}
P_1 &= (x_1; y_1; 0) = (12.0;\ 2.5;\ 0.0)\ \text{mm} \\
P_2 &= (x_2; y_2; 0) = (5.0;\ 4.0;\ 0.0)\ \text{mm} \\
P_3 &= (x_3; y_3; 0) = (4.2;\ 15.0;\ 0.0)\ \text{mm} \\
\alpha &= \pi/6 \\
\vec{F}_1 &= (F_{1x}; F_{1y}; 0) = (0.0;\ \text{-}10.0;\ 0.0)\ \text{kN}
\end{aligned}$$

Incognite del problema:

F_2 intensità di $\vec{F}_2$ lungo la direzione nota
F_{3x} componente della forza $\vec{F}_3$ secondo x
F_{3y} componente della forza $\vec{F}_3$ secondo y

Soluzione:

$$\begin{aligned}
F_2 &= 7.858\ \text{kN} \\
F_{3x} &= -6.805\ \text{kN} \\
F_{3y} &= 6.071\ \text{kN}
\end{aligned}$$

3 Equilbrio nel piano con carico distribuito su una linea

In Fig.2 si mostra uno schema di forze piano, in cui compare una distribuzione di forze lungo una linea. Analogamente al caso precedente compaiono due ulteriori forze, di cui una nota in direzione e l'altra incognita nel piano.

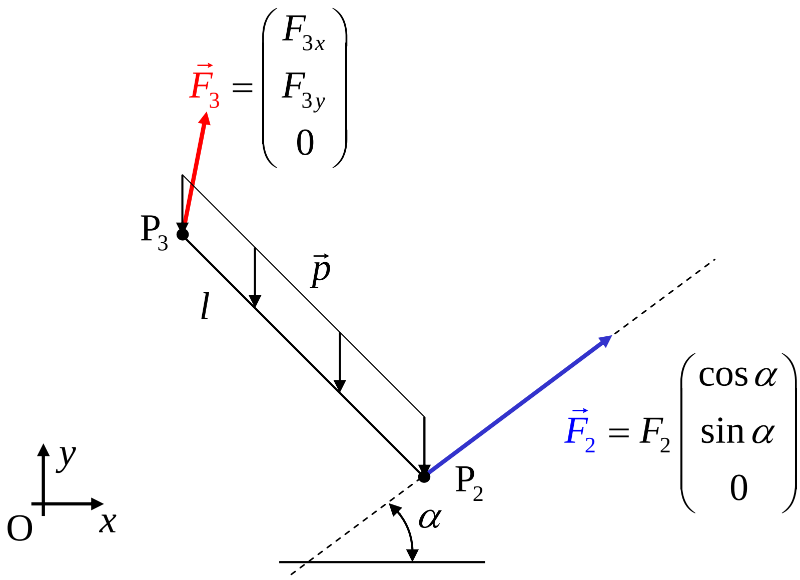

Figura 2: Sistema piano in cui compare una distribuzione di forze su una linea.

Dati del problema:

$$
\begin{aligned}
P_2 &= (x_2; y_2; 0) = (15.0;\ -2.0;\ 0.0)\ \text{mm} \\
P_3 &= (x_3; y_3; 0) = (2.5;\ 10.0;\ 0.0)\ \text{mm} \\
\alpha &= \pi/6 \\
\vec{p} &= (0; -p; 0) = (0.0;\ -300;\ 0.0)\ \text{N m}^{-1}
\end{aligned}
$$

Incognite del problema:

F_2 intensità di $\vec{F}_2$ lungo la direzione nota
F_{3x} componente della forza $\vec{F}_3$ secondo x
F_{3y} componente della forza $\vec{F}_3$ secondo y

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
F_2 &= 1.95\ \text{N} \\
F_{3x} &= -1.69\ \text{N} \\
F_{3y} &= 4.22\ \text{N}
\end{aligned}
$$

4 Riduzione di un sistema di forze generico, a risultante non nulla, ad un punto dell'asse centrale

Dato un sistema di due forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ generiche nello spazio, Fig.3.

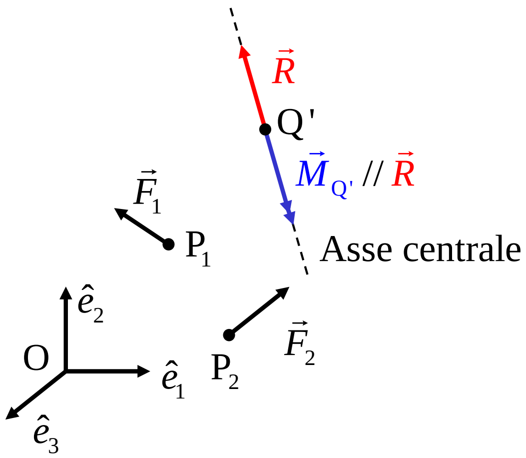

Figura 3: Sistema generico, equilibrato da due forze nel piano perpendicolare all'asse centrale.

Dati del problema:

$$
\begin{array}{lcl}
P_1 & = & (2.0;\ 0.0;\ 0.0)\ \text{mm} \\
\vec{F}_1 & = & (3.0;\ 4.0;\ 0.0)\ \text{N} \\
P_2 & = & (0.0;\ 1.0;\ 0.0)\ \text{mm} \\
\vec{F}_2 & = & (10.0;\ 0.0;\ -2.0)\ \text{N}
\end{array}
$$

Ridurre il sistema ad un punto Q′ dell'asse centrale del sistema.

Soluzione:

$$
\begin{array}{lcl}
\vec{R} & = & (13.0;\ 4.0;\ -2.0)\ \text{N} \\
Q' & = & (-0.042;\ 0.159;\ 0.042)\ \text{mm} \\
M_{Q'} & = & \alpha\vec{R} \\
\alpha & = & -0.116\ \text{mm}
\end{array}
$$

5 Equilibrio nello spazio di un sistema di forze generico

Sia dato un sistema di forze Σ generico nello spazio, già ridotto in un punto Q′ del proprio asse centrale. Pertanto tale sistema è costituito da una forza $\vec{R}$ ed una coppia di forze di momento $\vec{M}_{Q'}$, Fig.3.

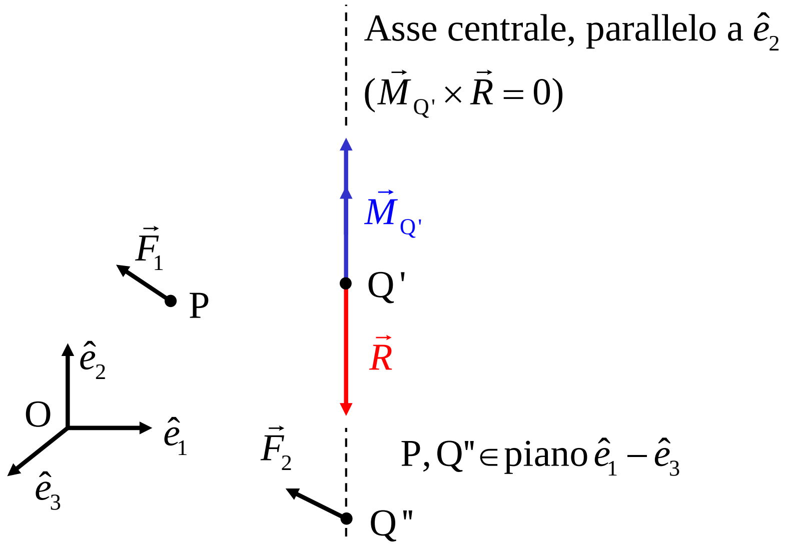

Figura 4: Sistema generico, equilibrato da due forze nel piano perpendicolare all'asse centrale.

Determinare $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ tali che il sistema sia equilibrato.
Quante soluzioni ammette il problema ?
Sotto quali condizioni il problema ammette soluzione ?