Meccanica e Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
Esercitazioni del corso. Periodo I
Prof. Leonardo BERTINI
Ing. Ciro SANTUS

Esercitazione 02:
Sistemi di forze, nozioni di base

Indice

1 Definizione di sistema di forze

Si definisce un sistema di forze Σ un insieme di n forze $\vec{F}_i$ rispettivamente applicate nei punti P_i. Dato un sistema di forze è possibile definire due vettori che lo caratterizzano:

- *risultante* $\vec{R}$,
- *momento risultante* $\vec{M}_{\mathrm{Q}}$ calcolato rispetto ad un polo Q:

La risultante è definita semplicemente come la somma di tutti i vettori forza:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{1}$$

a differenza delle singole forze $\vec{F}_i$ che sono vettori applicati, la risultante $\vec{R}$ è un vettore libero ossia non necessita di un punto di applicazione.

Il momento risultante è la somma di ciascun momento di ciascuna forza $\vec{\mathrm{F}}_i$, calcolati rispetto allo stesso polo Q.

$$\vec{M}_{\mathrm{Q}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{QP_i}} \times \vec{F}_i \tag{2}$$

anche il vettore momento risultante non necessita di un punto di applicazione, pertanto anch'esso è un vettore libero.

2 Equivalenza fra due sistemi di forze

Due sistemi di forze Σ e Σ' vengono detti equivalenti se soddisfano entrambe le condizioni:

- hanno stessa risultante $\vec{R} = \vec{R}'$
- hanno stesso momento risultante rispetto ad un qualsiasi polo di calcolo Q.

è importante porre l'attenzione sull'espressione 'un qualsiasi polo di calcolo Q'. A rigore sarebbe necessario chiedere che il momento risultante sia uguale per tutti i poli di calcolo Q, ossia per tutti i punti dello spazio.
Fortunatamente vale il seguente risultato:
se due sistemi Σ e Σ' hanno la stessa risultante $\vec{R}$ ed esiste almeno un polo Q per il quale il momento risultante è lo stesso, allora lo è anche per un qualsiasi altro polo di calcolo Q^*, infatti:

$$\vec{M}_{\mathrm{Q}^*} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{Q^*P_i}} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\mathrm{Q^*Q}} + \vec{\mathrm{QP_i}}) \times \vec{F}_i = \vec{\mathrm{Q^*Q}} \times \vec{R} + \vec{M}_{\mathrm{Q}} \tag{3}$$

grazie a questo risultato, nella definizione di equivalenza l'espressione 'un qualsiasi polo di calcolo Q' può essere interpretata come: 'per almeno un punto' dal momento che è richiesta anche la condizione di risultante uguale.

Da osservare che due sistemi possono essere *equivalenti* pur non essendo *identici*.

Individuare un (semplice) esempio di due sistemi di forze equivalenti ma non identici.

2.1 Particolari sistemi di forze

Esistono dei sistemi di forze semplici che presentano particolari proprietà:

- sistema nullo o costituito da nessuna forza. Risulta evidente che $\vec{R} = 0$ e $\vec{M}_{\mathrm{Q}} = 0$ qualsiasi polo Q si scelga;
- sistema costituito da una sola forza $\vec{F}$ applicata in P. Per tale sistema si ha $\vec{R} = \vec{F}$ ed inoltre $\vec{M}_{\mathrm{Q}} = 0$ per un qualsiasi polo Q che giace lungo la retta d'azione di $\vec{F}$ (Fig.1);
- coppia di forze (due forze uguali ed opposte applicate in due punti distinti), per tale sistema la risultante è zero, mentre il momento risultante (vedi esercitazione precedente) è indipendente dal polo considerato e vale $\vec{M}_{\mathrm{Q}} = \vec{\mathrm{P_1P_2}} \times \vec{F}_2$ (Fig.2).

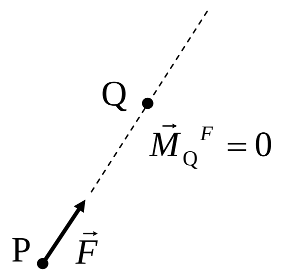

Figura 1: Sistema costituito da una sola forza, il momento risultante calcolato rispetto ad un polo Q che giace sulla retta d'azione della forza è nullo.

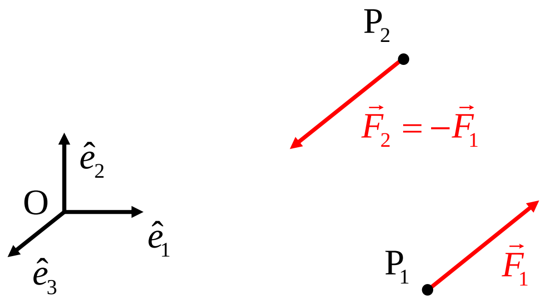

Figura 2: Coppia di forze.

Da quanto appena detto risulta evidente che un sistema costituito da una sola forza è equivalente a quello ottenuto traslando tale forza lungo la sua retta d'azione ed inoltre una coppia di forze identifica un momento.

2.2 Riduzione di un sistema di forze ad un punto

Sia Σ un sistema di forze ed A un punto qualsiasi dello spazio. Esiste la possibilità di individuare un sistema di forze più semplice e che sia equivalente al sistema dato.
Considerando il sistema costituito da:

- da una forza pari alla risultante $\vec{R}$ applicata in A;
- una coppia di forze tale che il relativo momento sia $M = \sum_{i=1}^{n} \vec{AP}_i \times \vec{F}_i$

si ottiene un sistema di forze equivalente a quello di partenza e costituito da 3 forze soltanto.

Con riferimento alla Fig.3, ridurre il sistema di forze in A.

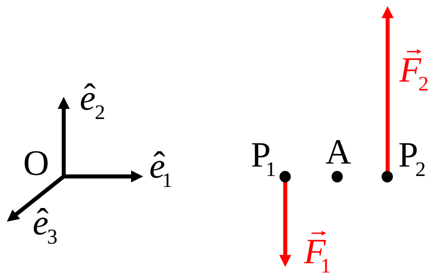

Figura 3: Sistema di forze da ridurre in A.

Dati del problema:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= (4.0; 0.0; 0.0)\ \text{mm} \\
P_2 &= (5.0; 0.0; 0.0)\ \text{mm} \\
A &= (4.5; 0.0; 0.0)\ \text{mm} \\
\vec{F}_1 &= (0.0; -10.0; 0.0)\ \text{N} \\
\vec{F}_2 &= (0.0; 15.0; 0.0)\ \text{N}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

2.3 Proprietà "associativa" dell'equivalenza di sistemi di forze

Nell'individuare un sistema di forze equivalenti spesso è utile raggruppare due o più forze ed individuare un sistema equivalente a quella porzione di forze, successivamente da considerare con le altre rimanenti.
Una tipica applicazione di tale concetto riguarda le forze distribuite su una linea (o superficie o volume).

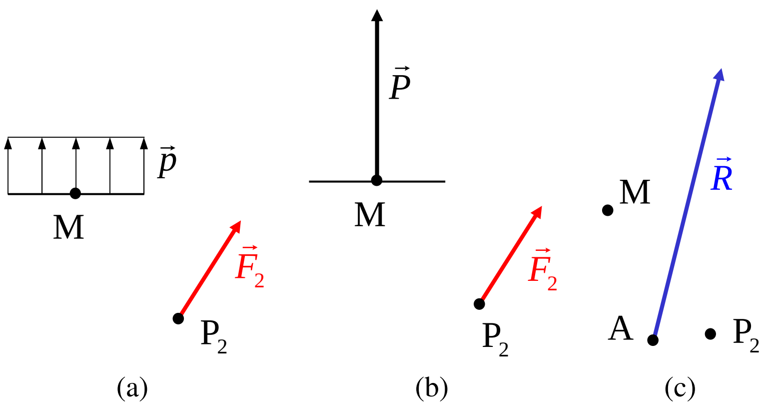

Figura 4: Utilizzo della proprietà additiva dell'equivalenza di sistemi di forze.

Se ad esempio consideriamo il sistema di forze di Fig.4(a) è possibile individuare un sistema di forze equivalente alla sola porzione di forze distribuite lungo la linea, successivamente è possibile, in modo più agevole, comporre le due forze rimanenti di Fig.4(b) ed ottenere il sistema di Fig.4(c). Tutti i tre sistemi sono equivalenti fra loro.

3 Trinommio invariante

Dato un qualsiasi sistema Σ di n forze $\vec{F}_i$, rispettivamente applicate nei punti P_i, si indica come trinomio invariante:

$$\vec{R}\cdot\vec{M}_{\mathrm{Q}} = R_1M_1 + R_2M_2 + R_3M_3 \tag{5}$$

ed ha la proprietà di non dipendere da Q (invariante rispetto al polo di calcolo).
In particolare per un sistema a risultante non nulla e tale che Q′ appartenga all'asse centrale, il trinomio invariante è il prodotto dell'intensità di $\vec{R}$ e di $\vec{M}_{\mathrm{Q}}$.

Con riferimento alla Fig.5, verificare la proprietà del trinomio invariante: $\vec{R}\cdot M_{\mathrm{Q}_0} = \vec{R}\cdot M_{\mathrm{Q}_1} = \vec{R}\cdot M_{\mathrm{Q}_2}$.

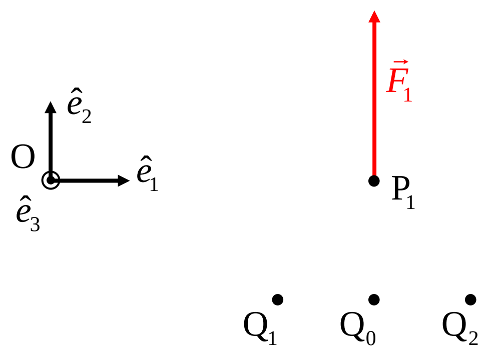

Figura 5: Semplice esempio su cui verificare l'indifferenza del trinomio invariante rispetto al polo di calcolo.

Dati del problema:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_1 &= (3.0; 0.0; 0.0)\,\mathrm{m}\\
\vec{F}_1 &= (0.0; 1.0; 0.0)\,\mathrm{N}\\
\mathrm{Q}_0 &= (3.0; -1.0; 0.0)\,\mathrm{m}\\
\mathrm{Q}_1 &= (2.0; -1.0; 0.0)\,\mathrm{m}\\
\mathrm{Q}_2 &= (4.0; -1.0; 0.0)\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

4 Asse centrale

Dato un sistema Σ di n forze $\vec{F}_i$, rispettivamente applicate nei punti P_i, tale che $\vec{R} \neq 0$ (in pratica che non sia una coppia di forze) si può dimostrare che esiste un opportuno polo Q′ tale che valga la relazione:

$$\vec{M}_{\mathrm{Q}'} \times \vec{R} = 0 \tag{6}$$

Partendo da tale polo Q$'$ segue che un qualsiasi altro punto Q$''$ sulla retta parallela ad $\vec{R}$ e passante per Q$'$ offre lo stesso risultato, ossia:

$$\vec{M}_{\mathrm{Q}''} \times \vec{R} = 0 \tag{7}$$

per cui i punti di tale retta, definita come *asse centrale* sono in un certo senso 'preferenziali' per la scelta del polo di riduzione.
Per individuare un punto dell'asse centrale Q$'$ si parte da un polo di tentativo Q qualsiasi, si calcolano $\vec{R}$ e $\vec{M}_{\mathrm{Q}}$ ed infine si determina:

$$\vec{\mathrm{QQ}'} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_{\mathrm{Q}}}{\vec{R} \cdot \vec{R}} \tag{8}$$

La condizione di asse centrale stabilisce che il vettore risultante e momento risultante siano paralleli, Fig.6.

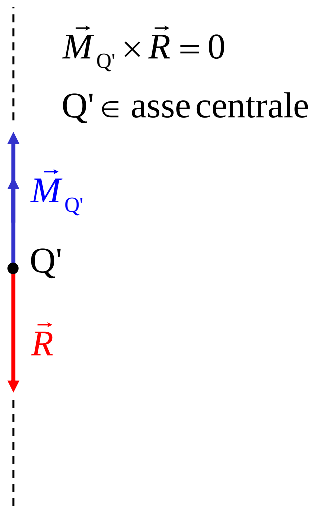

Figura 6: Asse centrale di un sistema di forze.

4.1 Sistemi di forze a risultante non nulla e a trinomio invariante nullo

Sono di particolare interesse i sistemi che hanno trinomio invariante nullo pur essendo a risultante non nulla. In tal caso infatti è possibile utilizzare un punto dell'asse centrale su cui ridurre il sistema ottenendo $\vec{M}_{\mathrm{Q}} = 0$. Ossia il sistema è equivalente semplicemente ad una forza (pari ovviamente alla risultante) applicata su un punto dell'asse centrale, senza la necessità di un'ulteriore coppia di forze.
Le categorie di sistemi di forze che hanno questa proprietà sono:

- sistemi di forze parallele (ad esempio un distribuzione di forze peso), in tal caso l'asse centrale è sicuramente parallelo a tutte le altre forze;
- sistemi piani, ossia tutte le forze e i rispettivi punti di applicazione sono contenuti in un unico piano, in tal caso l'asse centrale giace anch'esso nel piano;
- sistemi di forze tutte incidenti in un punto, in tal caso l'asse centrale passa per il punto di incidenza.

5 Riduzione di semplici carichi distribuiti

Un esempio di sistema di forze, particolarmente utile nella Tecnica delle Costruzioni Meccaniche è una distribuzione di carichi lungo una linea.
Tale sistema di forze rappresenta una buona modellazione di una struttura monodimensionale caricata ad esempio dal peso di masse appoggiate.
Come presentato in Fig.7 considerato un tratto elementare dx si può considerare su di esso una forza concentrata d$\vec{F}$.

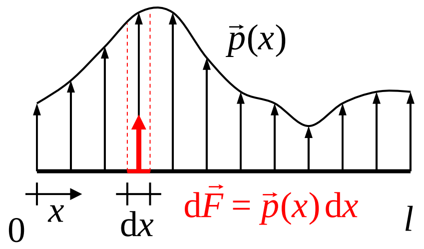

Figura 7: Carico distribuito lungo una linea, insieme di forze elementari.

L'intero sistema di forze può quindi essere considerato come un'insieme di tante forze elementari, inoltre tutte le singole forze elementari sono parallele. Per cui il sistema ha la proprietà di avere trinomio invariante nullo. Per quanto detto prima è quindi possibile individuare un sistema di forze equivalenti a quello dato costituito soltanto da una sola forza (pari alla risultante) applicata in corrispondenza dell'asse centrale.
Per determinare la risultante si esegue semplicemente un integrale:

$$R = \int_0^l p(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

mentre per determinare la posizione dell'asse centrale basta ricordare che il momento del sistema di forze dato deve essere uguale a quello equivalente, rispetto ad un qualsiasi polo (ad esempio l'origine della coordinata x). Per cui è necessario imporre:

$$Rd = \int_0^l p(x)x\mathrm{d}x \tag{10}$$

dove con d si indica la posizione dell'asse centrale rispetto all'origine della coordinata x, per cui in definitiva:

$$d = \frac{\int_0^l p(x)x\mathrm{d}x}{\int_0^l p(x)\mathrm{d}x} \tag{11}$$

Il sistema equivalente ottenuto è rappresentato in Fig.8.

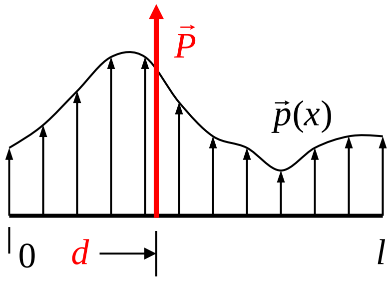

Figura 8: Carico distribuito lungo una linea. Sistema equivalente costituito dalla sola risultante applicata all'asse centrale.

Determinare il sistema equivalente più semplice per le distribuzioni di Fig.9(a),(b).

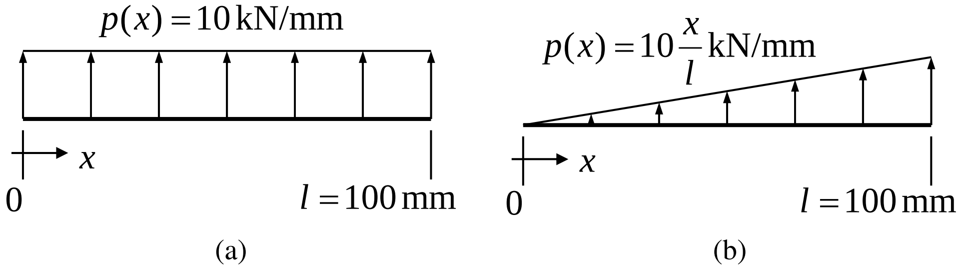

Figura 9: Carichi distribuiti di cui trovare il sistema equivalente: (a) carico uniforme, (b) carico distribuito linearmente.

Determinare il sistema equivalente più semplice per la distribuzione di Fig.10.

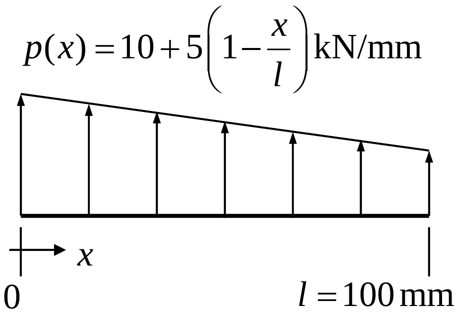

Figura 10: Carico con distribuzione trapezoidale di cui trovare il sistema equivalente.

Suggerimento: Utilizzare i risultati del precedente esercizio ed applicare la proprietà additiva dell'equivalenza di sistemi di forze.