Meccanica e Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
Esercitazioni del corso. Periodo I
Prof. Leonardo BERTINI
Ing. Ciro SANTUS

Esercitazione 04:
Statica del corpo rigido vincolato

Indice

1 Statica del corpo rigido **1**
1.1 Reazioni vincolari 1

2 Casistica, per esempi, di corpo rigido vincolato **2**
2.1 Trave fra appoggio e cerniera 2
2.2 Trave fra due appoggi 3
2.3 Trave fra due cerniere 4
2.4 Trave fra tre appoggi 5
2.5 Principio di sovrapposizione degli effetti 6

1 Statica del corpo rigido

Un corpo *rigido* è in condizioni di *equilibrio statico* se è inizialmente fermo e se il sistema di forze applicato su di esso è equilibrato.
Nel seguito si parte dall'ipotesi di equilibrio statico e quindi il sistema di forze deve essere necessariamente equilibrato.

1.1 Reazioni vincolari

Su di un corpo rigido possono essere esercitate sia forze attive (ad esempio la forza peso) sia forze reattive generate dalla presenza di vincoli applicati sul corpo. L'unica differenza è che generalmente le forze attive sono note, mentre le reazioni vincolari si sviluppano per impedire il moto secondo una o più direzioni, per cui tali forze sono le incognite del problema. Ai fini dell'equilibrio non c'è distinzione fra forze note o reazioni vincolari, deve essere soddisfatto l'equilibrio del sistema di *tutte* le forze che agiscono sul corpo rigido.
Un problema di statica prevede quindi di utilizzare le equazioni di equilibrio per risolvere le reazioni vincolari incognite, generando quindi un sistema lineare. Tuttavia non sempre il sistema ottenuto è ben posto, ossia non sempre esiste una ed una sola soluzione del problema.
Piuttosto che affrontare l'intera casistica in termini generici, verranno mostrati di seguito opportuni esempi.

2 Casistica, per esempi, di corpo rigido vincolato

2.1 Trave fra appoggio e cerniera

In Fig.1 è mostrato lo schema di trave fra appoggio e cerniera sollecitata con forza concentrata (nota) applicata su di un suo punto.

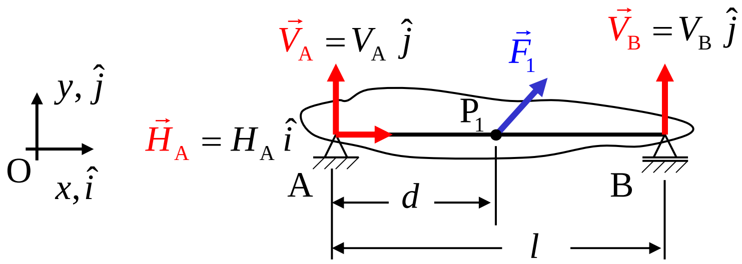
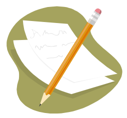


Figura 1: Schema di trave fra appoggio e cerniera.

Determinare le reazioni vincolari incognite, che in accordo con lo schema, sono gli scalari H_A, V_A, V_B.



Osservazione: Il sistema ottenuto ammette una ed una sola soluzione, qualunque sia la condizione di carico. In tal caso si dice che il problema è intrinsecamente isostatico, ed è quindi il caso preferenziale.

2.2 Trave fra due appoggi

In Fig.2(a),(b) è mostrato lo schema di trave fra due appoggi sollecitata in due modi diversi.

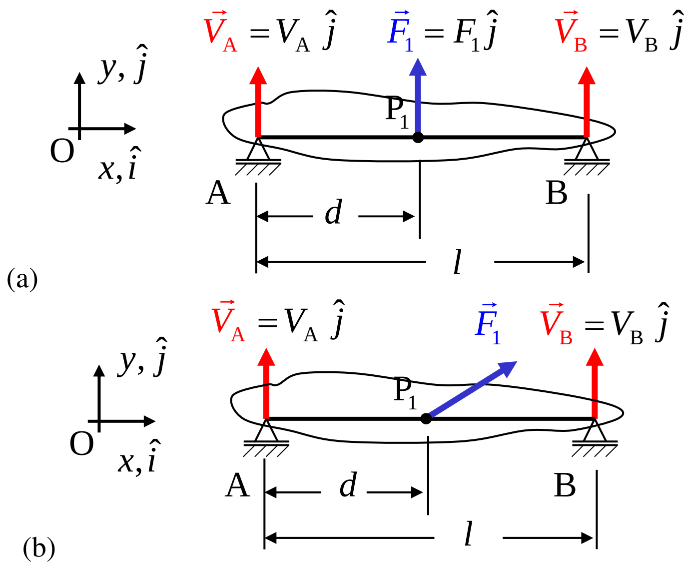


Figura 2: Schema di trave fra due appoggi: (a) caso in cui la forza attiva non interagisce con la labilità dello schema di vincolo. (b) caso in cui la labilità è interessata dall'azione delle forza attiva.

Determinare le reazioni vincolari incognite, che in accordo con lo schema, sono gli scalari V_A, V_B.

Osservazioni:

- il caso di Fig.2(a) ammette una ed una sola soluzione, per cui è isostatico;
- il caso di Fig.2(b) non ammette soluzione, per cui è labile;

In quanto per opportune condizioni di forze esterne il sistema è labile, lo schema di vincolo non può essere definito come intrinsecamente isostatico.

2.3 Trave fra due cerniere

In Fig.3 è mostrato lo schema di trave fra due cerniere sollecitata con un carico generico.

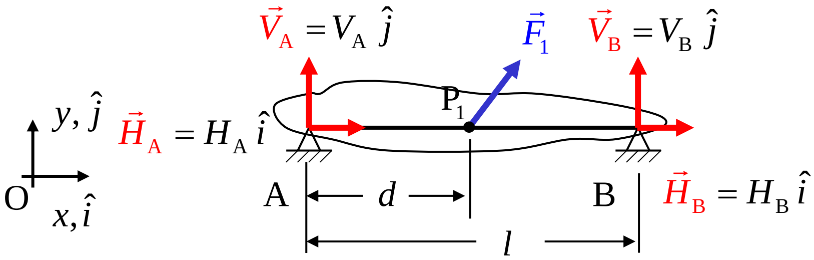
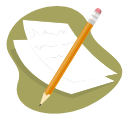


Figura 3: Schema di trave fra due cerniere.

Determinare le reazioni vincolari incognite, che in accordo con lo schema, sono gli scalari H_A, V_A, H_B, V_B.



Osservazione: In questo caso il sistema ammette ∞ soluzioni, al variare di 1 parametro libero (ad esempio una delle due reazioni vincolari, componente orizzontale). In tal caso si dice che il sistema è iperstatico

2.4 Trave fra tre appoggi

In Fig.4 è mostrato lo schema di trave fra tre appoggi sollecitata in due modi diversi.

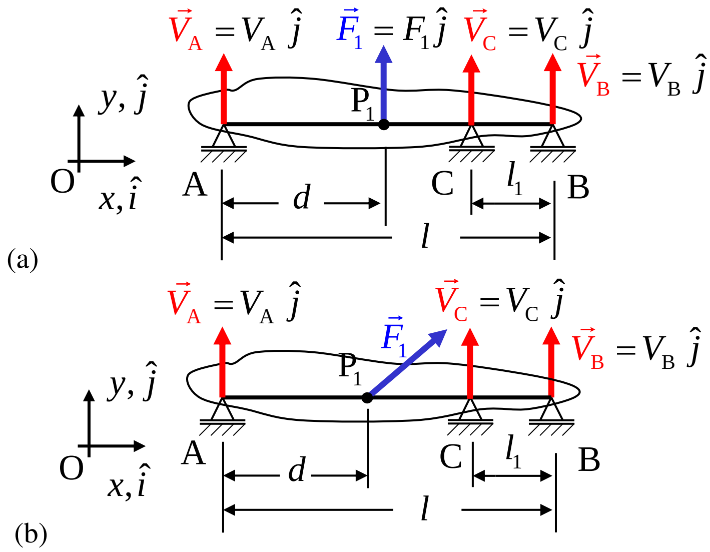


Figura 4: Schema di trave fra tre appoggi: (a) caso in cui la forza attiva non interagisce con la labilità dello schema di vincolo. (b) caso in cui la labilità è interessata dall'azione delle forza attiva.

Determinare le reazioni vincolari incognite, che in accordo con lo schema, sono gli scalari V_A, V_B, V_C.

Osservazioni:

- il caso di Fig.4(a) ammette ∞ soluzioni, al variare di 1 parametro libero (ad esempio una delle tre reazioni vincolari verticali);
- il caso di Fig.4(b) è invece labile, in quanto non ammette nessuna soluzione.

2.5 Principio di sovrapposizione degli effetti

Dato che le equazioni di equilibrio sono lineari, come visto in precedenza, si ottiene un sistema lineare che ammette come incognite le reazioni vincolari mentre il termine noto è lineare nelle forze attive.
Formalmente si può quindi scrivere:

$$\mathbf{A}_{e\times m}\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} = \mathbf{b}_{e\times n}\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

In cui:

- e è il numero di equazioni da imporre (ad esempio 3 per un problema piano, come in precedenza; 6 per un problema tridimensionale);
- m è il numero delle incognite, ossia delle *componenti* delle reazioni vincolari;
- n è il numero delle *componenti* delle forze attive;
- $\mathbf{A}_{e\times m}$ è la matrice di statica;
- $\mathbf{b}_{e\times n}$ è la matrice del termine noto.

A partire da tale forma risulta quindi evidente la linearità delle reazioni vincolari (*effetto*) in funzione delle forze attive (*causa*).

Determinare i termini della forma di Eq.1 per lo schema di carico di Fig.1.

Risolvere lo schema di Fig.5, determinare le reazioni vincolari: H_A, V_A, V_B, sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti.

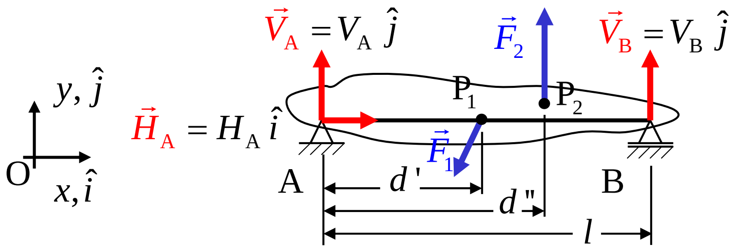


Figura 5: Schema di carico di trave fra cerniera ed appoggio con due forze esterne.

Dati:

$$
\begin{aligned}
l &= 250 \text{ mm} \\
d' &= 140 \text{ mm} \\
d'' &= 180 \text{ mm} \\
\vec{F}_1 &= F_{1x}\hat{\imath} + F_{1y}\hat{\jmath} \\
\vec{F}_2 &= F_2\hat{\jmath} \\
F_{1x} &= -10 \text{ N} \\
F_{1y} &= -120 \text{ N} \\
F_2 &= 150 \text{ N}
\end{aligned}
$$

Suggerimento: Notare che una *base* di soluzione è fornita dai casi riportati in Fig.6.

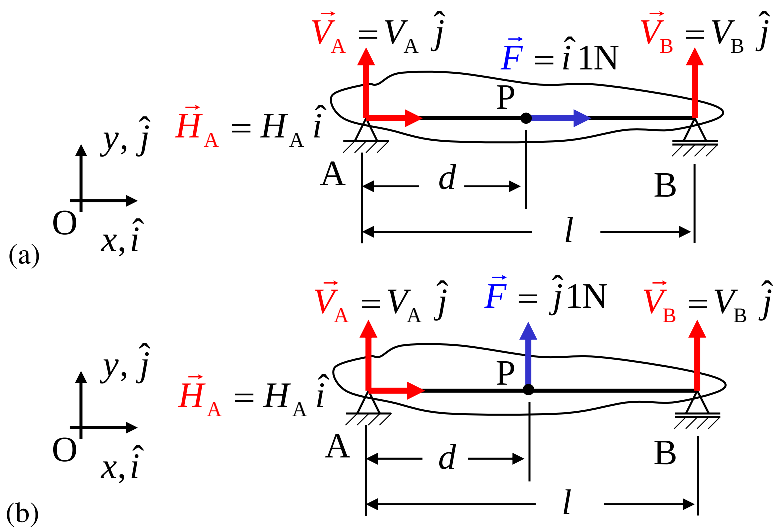


Figura 6: Soluzioni base mediante le quali è possibile risolvere il caso di carico di Fig.5, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Soluzione:

$$
\begin{aligned}
H_{\mathrm{A}} &= 10.0\ \mathrm{N} \\
V_{\mathrm{A}} &= 10.8\ \mathrm{N} \\
V_{\mathrm{B}} &= -40.8\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$