Meccanica e Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
Esercitazioni del corso. Periodo I
Prof. Leonardo BERTINI
Ing. Ciro SANTUS

Esercitazione 01:
Introduzione all'algebra dei vettori

Indice

1 Grandezze scalari e vettoriali

- Una quantità fisica che è definita da un numero (o intensità) e da un'unità di misura è detta *scalare*.
  Es.: *Temperatura*, *Densità*, *Massa*, ecc.
- Una quantità fisica definita da una direzione, con verso, da un numero (o intensità) e da un'unità di misura è detta *vettoriale*.
  Es.: *Spostamento*, *Velocità*, *Forza*.
  Si indica con con il simbolismo:

$$\vec{v} \tag{1}$$

Inoltre è possibile definire:

- vettore *libero*: *direzione* (con verso), *intensità*, *unità di misura*;
- vettore *applicato*: direzione (con verso), intensità, unità di misura e *punto di applicazione*.

2 Operazioni su vettori

2.1 Modulo di un vettore

Si definisce modulo di un vettore il modulo della sua intensità e si indica con il simbolismo:

$$|\vec{v}| \tag{2}$$

Spesso si indica invece con il simbolo v l'intensità del vettore $\vec{v}$, l'unica differenza è che l'intensità può anche essere negativa, il che implica l'inversione di verso del vettore. Nel seguito risulterà infatti più comodo (ad esempio quando il vettore è incognito) l'utilizzo del concetto di intensità, in modo da imporre una direzione con verso, invertito eventualmente dal valore negativo dell'intensità.

2.2 Vettori notevoli

Si definiscono dei particolari vettori:

- vettore nullo: ha intensità nulla e quindi non sono definibili direzione ed unità di misura;
- versore, o vettore unitario: ha come intensità 1, inteso come numero puro (ossia privo di unità di misura), definisce solo una direzione (con verso).
  Si indica con con il simbolismo:

  $$\hat{v} \tag{3}$$

Semplicemente, il modulo di un vettore nullo è 0, mentre quello di un versore è 1.

2.3 Prodotto di uno scalare per un vettore

Dato un scalare α ed un vettore $\vec{u}$ si definisce:

$$\vec{v} = \alpha\vec{u} \tag{4}$$

il vettore di verso e direzione secondo $\vec{u}$, intensità αu ed unità di misura il prodotto delle due: $[\vec{v}] = [\alpha]\ [u]$.
Segue che il versore $\hat{v}$ di un vettore $\vec{v}$ è dato da:

$$\hat{v} = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \tag{5}$$

notare che la quantità $1/|\vec{v}|$ è uno scalare.

2.4 Somma di due vettori

Due vettori omogenei (stessa unità di misura) possono essere sommati, secondo la regola del parallelogramma, Fig.1.
La somma di due vettori gode delle seguenti proprietà:

- proprietà *commutativa*:

  $$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \tag{6}$$

- proprietà *associativa*:

  $$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \tag{7}$$

  per cui è possibile scrivere, senza pericolo di errore: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

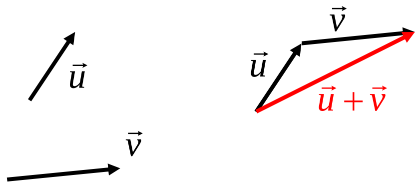


Figura 1: Somma di due vettori.

2.5 Prodotto scalare

Dati due vettori (non necessariamente omogenei) è possibile definire il seguente prodotto:

$$\hat{u}\cdot\hat{v} = |\hat{u}||\hat{v}|\cos(\alpha) \tag{8}$$

in cui α è il minimo angolo fra i due vettori, Fig.2.

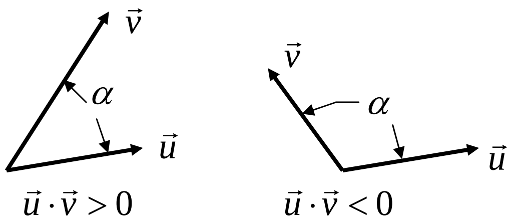


Figura 2: Segno del prodotto scalare fra due vettori.

Ovviamente tale prodotto è nullo se uno due vettori è nullo o se il loro angolo $\alpha = \pi/2$.

2.6 Rappresentazione di un vettore in componenti

Sia $\vec{v}$ un qualsiasi vettore e sia data una terna di versori $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ uscenti da un punto O e ortogonali fra di loro, Fig.3.

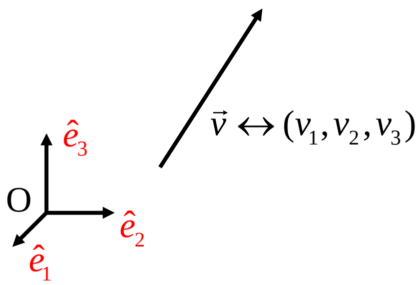


Figura 3: Componenti di un vettore, corrispondenza biunivoca con una terna di scalari.

È possibile scrivere il vettore $\vec{v}$ nel seguente modo:

$$\vec{v} = \hat{e}_1 v_1 + \hat{e}_2 v_2 + \hat{e}_3 v_3 \tag{9}$$

essendo i versori ortogonali segue che (ad esempio per la prima componente, ma analogamente per le altre):

$$\vec{v}\cdot\hat{e}_1 = (\hat{e}_1 v_1 + \hat{e}_2 v_2 + \hat{e}_3 v_3)\cdot\hat{e}_1 = v_1 \tag{10}$$

per cui il prodotto scalare di un vettore per un versore, fornisce la componente di tale vettore rispetto alla direzione individuata dal versore.
È quindi possibile stabile una corrispondenza biunivoca fra il vettore $\vec{v}$ ed una terna $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ fissata una terna di versori ortogonali fra loro $\hat{e}_i$, con $i = 1 \dots 3$.

Dimostrare che vale la seguente relazione:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \tag{11}$$

Suggerimento: il prodotto scalare è distributivo rispetto alla somma, vale pertanto la relazione $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{u} = \vec{a} \cdot \vec{u} + \vec{b} \cdot \vec{u}$

2.7 Prodotto vettoriale

Dati due vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ il loro prodotto vettoriale è un terzo vettore:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} \tag{12}$$

tale che:

- $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{w} \cdot \vec{v} = 0$;
- $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\alpha)$;
- per definire il verso, si utilizza la convenzione levogira, ossia $\vec{w}$ vede ruotare il primo vettore $\vec{u}$ sul secondo dell'angolo minore, Fig.4.

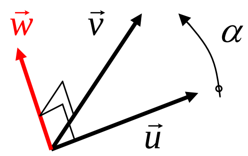


Figura 4: Definizione del verso del prodotto vettoriale, $\vec{u}$ ruota verso $\vec{v}$ della quantità α (angolo minore fra i due).

Per cui risulta chiaro che $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$, ossia il prodotto vettoriale è anti-commutativo.

In accordo con la definizione di prodotto vettoriale, una terna di versori ortogonali fra loro $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ viene detta levogira se vale la relazione: $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$.
Convenzionalmente si utilizza sempre una terna levogira.

Data una terna levogira $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, è possibile scrivere un vettore mediante le sue componenti[1] come visto in precedenza: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Per determinare le componenti del vettore prodotto vettoriale $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ si può utilizzare la regola del determinante:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{13}$$

che quindi esplicitata:

$$\vec{w} = \hat{e}_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) - \hat{e}_2(u_1 v_3 - u_3 v_1) + \hat{e}_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) \tag{14}$$

Il *momento di una forza* si definisce come il prodotto vettoriale fra il suo *braccio* rispetto ad un polo Q (qualsiasi nello spazio) e il vettore forza stesso. Il braccio di una forza è il vettore che va da Q al suo punto di applicazione P (Fig.5): $\vec{M}_Q^F = \vec{r} \times \vec{F}$.

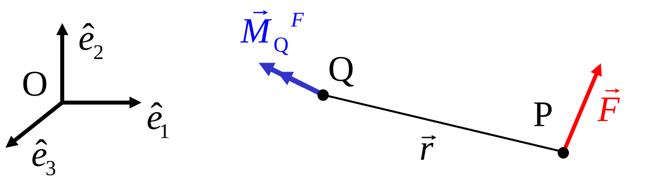
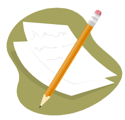


Figura 5: Definizione del momento di una forza (notazione a doppia freccia, usata spesso per indicare il vettore momento).

Q = (1.0;0.0;0.0) mm è il polo di calcolo, P = (2.0;0.0;0.0) mm è il punto di applicazione della forza $\vec{F} = 10.0\ (\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; 0.0)$ N. Calcolare il vettore $\vec{M}_Q^F$.



[1] L'utilizzo del simbolo '=' è improprio, dovrebbe essere utilizzato '$\leftrightarrow$'.

Un insieme di una o più forze $\vec{F}_i$ rispettivamente applicate nei punti di applicazione P_i si dice *sistema di forze*. Un particolare sistema di forze è quello costituito da due sole forze uguali ed opposte (stessa intensità, unità di misura, direzione ma verso opposto) ed applicate in due punti diversi (Fig.7) e viene detto *coppia di forze*.

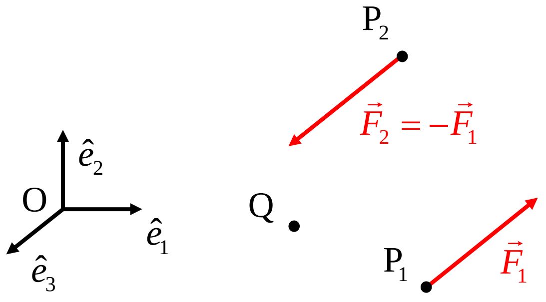
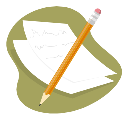


Figura 6: Coppia di forze.

Il momento di un sistema di forze $\vec{M}_{\mathrm{Q}}^{F_i}$ è semplicemente la somma (vettoriale) di tutti i singoli momenti di ciascuna forza $\vec{F}_i$ rispetto allo stesso polo Q.
Dimostrare che per il particolare sistema di forze di Fig.6 segue che:

$$\vec{M}_{\mathrm{Q}}^{F_1,F_2} = \vec{P_1P_2} \times \vec{F}_2 \tag{15}$$

Suggerimento: sfruttare la proprietà distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma, ossia: $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{v} = \vec{a} \times \vec{v} + \vec{b} \times \vec{v}$



Osservazione: per questo particolare sistema di forze la scelta del polo di calcolo Q è indifferente, notare invece che questo non si verifica in genere per sistema di forze qualsiasi.

2.8 Prodotto triplo

Dati tre vettori: $\vec{u}$; $\vec{v}$; $\vec{w}$; si definisce il prodotto triplo fra di essi come:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} \tag{16}$$

L'interpretazione geometrica di quest'operatore rappresenta il volume individuato dai tre vettori (Fig.7).

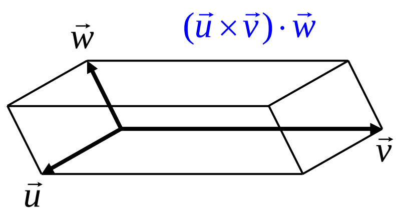


Figura 7: Prodotto triplo fra tre vettori.

È possibile dimostrare che:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{17}$$

ossia il determinante della matrice delle componenti.
Si può dimostrare che valgono le seguenti due regole di permutazione:

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w} = (\vec{w}\times\vec{u})\cdot\vec{v} = (\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u} \tag{18}$$

Con riferimento alla Fig.5 calcolare la proiezione del momento $\vec{M}_O^F$ sulla direzione definita dal versore $\hat{d} = (\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2; 0)$.

3 Cambio di sistema di riferimento

Molto spesso è utile rappresentare un vettore per componenti rispetto ad un sistema di riferimento piuttosto che ad un altro.
Si pone quindi il problema di conoscere le coordinate del vettore rispetto al nuovo sistema conoscendo quelle rispetto al precedente, Fig.8.

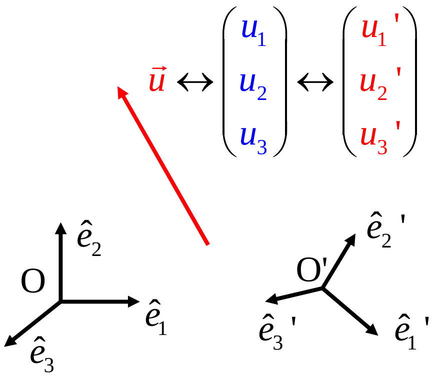


Figura 8: Cambio di sistema di riferimento, è necessario trovare le coordinate del vettore rispetto al nuovo sistema di riferimento.

Per risolvere questo problema basta eseguire lo sviluppo (ad esempio per la prima coordinata):

$$u_1' = \vec{u}\cdot\hat{e}_1' = (u_1\hat{e}_1 + u_2\hat{e}_2 + u_3\hat{e}_3)\cdot\hat{e}_1' = u_1\ \hat{e}_1\cdot\hat{e}_1' + u_2\ \hat{e}_2\cdot\hat{e}_1' + u_3\ \hat{e}_3\cdot\hat{e}_1' \tag{19}$$

da cui si capisce che è sufficiente raccogliere i prodotti scalari dei versori dei due sistemi di riferimento, definendo la matrice:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1\cdot\hat{e}_1' & \hat{e}_2\cdot\hat{e}_1' & \hat{e}_3\cdot\hat{e}_1' \\ \hat{e}_1\cdot\hat{e}_2' & \hat{e}_2\cdot\hat{e}_2' & \hat{e}_3\cdot\hat{e}_2' \\ \hat{e}_1\cdot\hat{e}_3' & \hat{e}_2\cdot\hat{e}_3' & \hat{e}_3\cdot\hat{e}_3' \end{pmatrix} \tag{20}$$

(notare che per righe scorre l'indice del riferimento vecchio, mentre per colonne scorre l'indice del riferimento nuovo).
Quindi in definitiva si ottiene che:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{21}$$

Inoltre si dimostra che la matrice $\mathbf{Q}$ è ortogonale ($\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$) per cui è possibile il semplice passaggio inverso utilizzando la trasposta di $\mathbf{Q}$ senza la difficoltà di calcolarne l'inversa.

Calcolare le componenti della forza di Fig.9 nel nuovo riferimento, conoscendo quelle rispetto al vecchio.

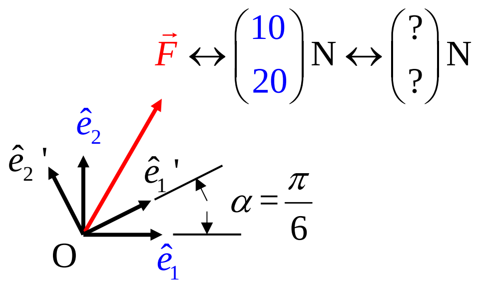


Figura 9: Cambio di sistema di riferimento (esercizio).