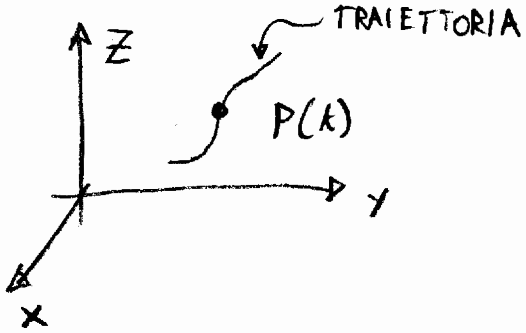
CINEMATICA

LEZ. 2

CINEMATICA DEL P.TO MATERIALE



$$P(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$$

$x(t),\ y(t),\ z(t)$

SONO FUNZIONI (EVENTUALMENTE INCOGNITE) DEL TEMPO

RAPPRESENTANO LA POSIZIONE DEL PUNTO MATERIALE P RISPETTO AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO

LA TRAIETTORIA E' LA CURVA DESCRITTA DAL P.TO DURANTE IL SUO MOTO IN UN CERTO INTERVALLO DI TEMPO

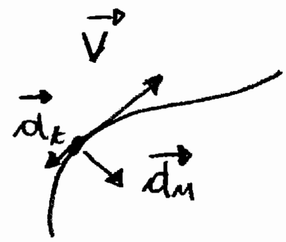
LA VELOCITÀ E' LA DERIVATA DELLA POSIZIONE RISPETTO AL TEMPO

$$\vec{V} = (\dot{x}(t),\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)) = (V_x(t),\ V_y(t),\ V_z(t))$$

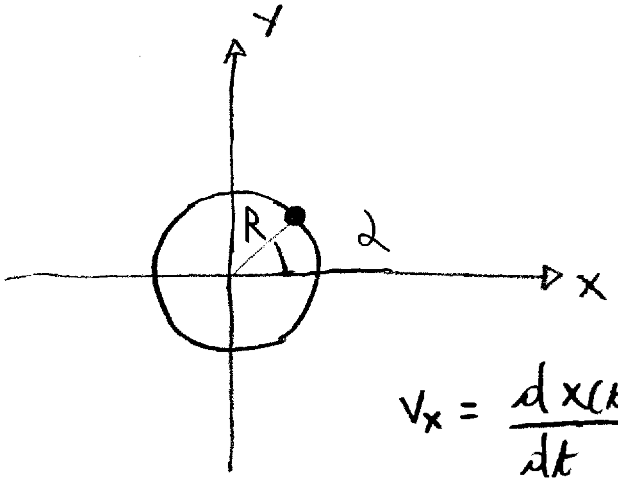
L'ACCELERAZIONE E' LA DERIVATA DELLA VELOCITA E QUINDI LA DERIVATA SECONDA DELLA POSIZIONE

$$\vec{a} = (\dot{V}_x(t),\ \dot{V}_y(t),\ \dot{V}_z(t)) = (\ddot{x}(t),\ \ddot{y}(t),\ \ddot{z}(t))$$

LA VELOCITÀ E' tg ALLA TRAIETTORIA, MENTRE L'ACC. HA UNA COMPONENTE TANGENTE ED UNA NORMALE RIVOLTA VERSO LA CURVATURA INTERNA



ES. MOTO CIRCOLARE UNIFORME



$$\alpha = \omega t$$

$$x = R\cos(\omega t)$$

$$y = R\sin(\omega t)$$

$$(z = 0)$$

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega R \sin(\omega t)$$

$$V_y = \frac{dy(t)}{dt} = \omega R \cos \omega t$$

ATTENZIONE E' NECESSARIO PRIMA DERIVARE E POI SOSTITUIRE:

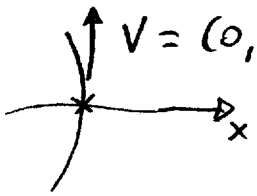
ES. $V(t=0)$

DOPO AVER DERIVATO SI SOSTITUISCE $t=0$

$$V_x = -\omega R \sin(\omega \times 0) = 0$$

$$V_y = \omega R \cos(\omega \times 0) = \omega R$$

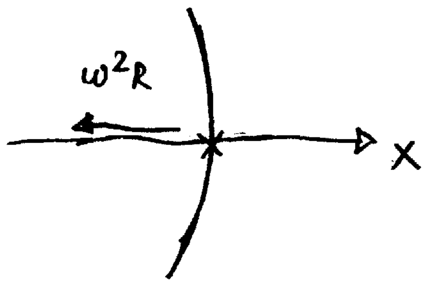
$V = (0, \omega R)$



ACCELERAZIONE

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = -\omega^2 R \cos(\omega t)$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 R \sin \omega t$$

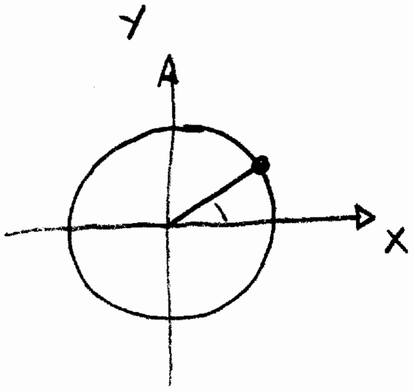


ES. $a\ (t=0)$

$$a_x = -\omega^2 R$$

$$a_y = 0$$

ES. MOTO CIRCOLARE ACCELERATO



$$\alpha = \frac{\gamma}{2} t^2 + \omega_0 t$$

$$x = R \cos(\gamma/2\, t^2 + \omega_0 t)$$

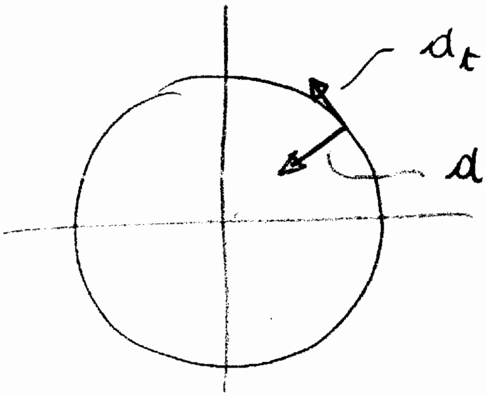
$$y = R \sin(\gamma/2\, t^2 + \omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = -R \sin(\gamma/2\, t^2 + \omega_0 t)\,(\gamma t + \omega_0)$$

$$\dot{y}(t) = R \cos(\gamma/2\, t^2 + \omega_0 t)\,(\gamma t + \omega_0)$$

$$\ddot{x}(t) = -R \cos(\gamma/2\, t^2 + \omega_0 t)(\gamma t + \omega_0)^2 - R\gamma \sin(\gamma/2\, t^2 + \omega_0 t)$$

$$\ddot{y}(t) = -R \sin(\gamma/2\, t^2 + \omega_0 t)(\gamma t + \omega_0)^2 + R\gamma \cos(\gamma/2\, t^2 + \omega_0 t)$$

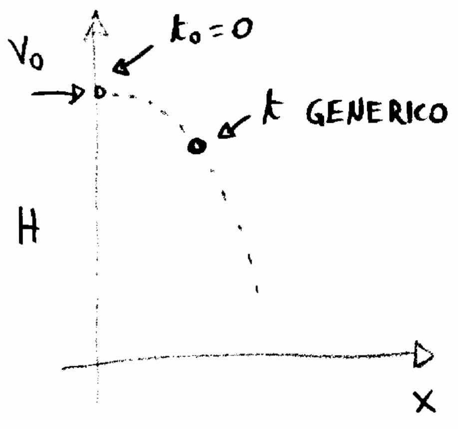


$a_t = R\gamma$ ← ACC. LUNGO LA TRAIETTORIA

$a_n = R\omega^2$ ← DIPENDE SOLO DALLA VEL. ISTANTANEA

$(\omega = \gamma t + \omega_0)$

ES. MOTO DI CADUTA PARABOLICO



$$x = V_0 t$$

$$y = H - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\dot{x} = V_0$$

$$\dot{y} = -g t$$

$$\ddot{x} = 0$$

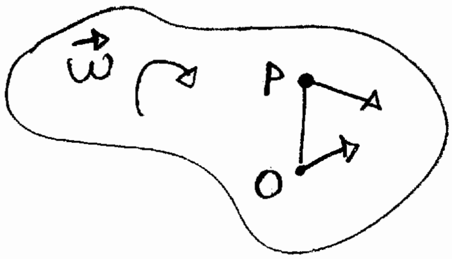
$$\ddot{y} = -g$$

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

E' POSSIBILE DEFINIRE, PER IL CORPO RIGIDO, UN VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE $\vec{\omega}$ (UNICO PER IL CORPO)

RAPPRESENTA LA VELOCITÀ DI "CAMBIO DI ORIENTAMENTO"

$$\boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}}$$



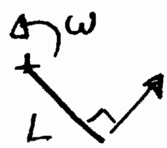
$$\frac{d\vec{i}^*}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}^*$$

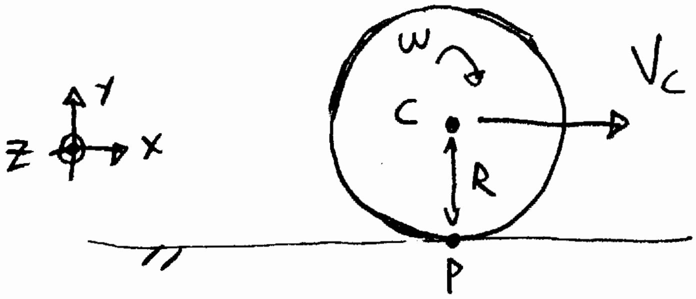
QUESTA RELAZIONE E' SEMPRE VALIDA ANCHE IN MOTO SPAZIALE GENERICO (3D)

NEL MOTO PIANO QUESTA RELAZIONE SI RIDUCE AD UN PRODOTTO (SEMPLICE) FRA ω E DISTANZA CON LA DIREZ. $\perp$ AL RAGGIO

CLASSICO ESEMPIO DELLA RUOTA

$\vec{\omega} \perp$ AL PIANO





$V_P = V_C - \omega R$

ESSENDO IL P.TO P A CONTATTO A TERRA

$V_P = 0 \Rightarrow \omega = \dfrac{V_C}{R}$

QUESTA RELAZIONE PUÒ ESSERE ESPRESSA IN FORMA VETTORIALE

$\vec{V}_P = (0, 0, 0)$

$\vec{V}_C = (V_C, 0, 0)$

$CP = (0, -R, 0)$

$\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$

$$\vec{\omega} \times \vec{CP} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & -R & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= X\begin{vmatrix}\omega_y & \omega_z\\ -R & 0\end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix}\omega_x & \omega_y\\ 0 & -R\end{vmatrix} = \left(\omega_z R,\ 0,\ -\omega_x R\right)$$

QUINDI

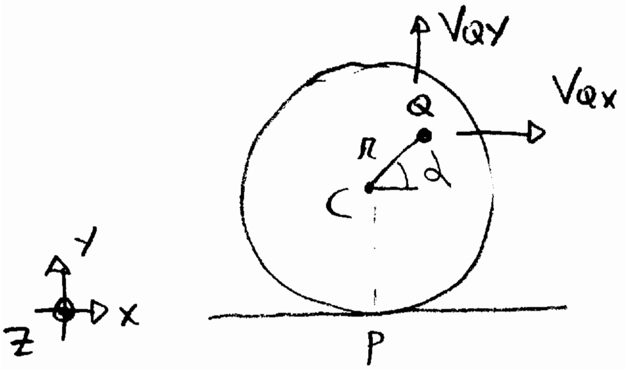
$$\vec{V}_P = \vec{V}_c + \vec{\omega}\times\vec{R}$$

$$(0, 0, 0) = (V_c, 0, 0) + (\omega_z R, 0, -\omega_x R)$$

QUINDI POSSIAMO DEDURRE $\omega_x = 0$, $\omega_z = -\dfrac{V}{R}$ (SENSO ORARIO)

<u>MENTRE</u> <u>NON</u> POSSIAMO CONCLUDERE NULLA SU ω_y

POSSIAMO AGGIUNGERE UN ALTRO PUNTO



$$V_Q = (V_{QX},\ V_{QY},\ 0)$$

$$\omega = \left(0,\ \underbrace{\omega_y}_{\text{ANCORA INCOGNITA}},\ \underbrace{\omega_z}_{\text{NOTA} = -\frac{V}{R}}\right)$$

$$\vec{V}_Q = \vec{V}_c + \vec{\omega}\times\vec{CQ}$$

$$= (V_c, 0, 0) + \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ 0 & \omega_y & \omega_z\\ r\cos\alpha & r\sin\alpha & 0\end{vmatrix} \quad \leftarrow -V_c/R$$

$$= (V_c, 0, 0) + \left(-\omega_z r \sin\alpha,\ \omega_z r\cos\alpha,\ -\omega_y r\cos\alpha\right)$$

$$= \left(V_c + \frac{V_c}{R} r \sin\alpha,\ -\frac{V_c}{R} r\cos\alpha,\ -\underbrace{\omega_y r \cos\alpha}_{=0}\right) =$$

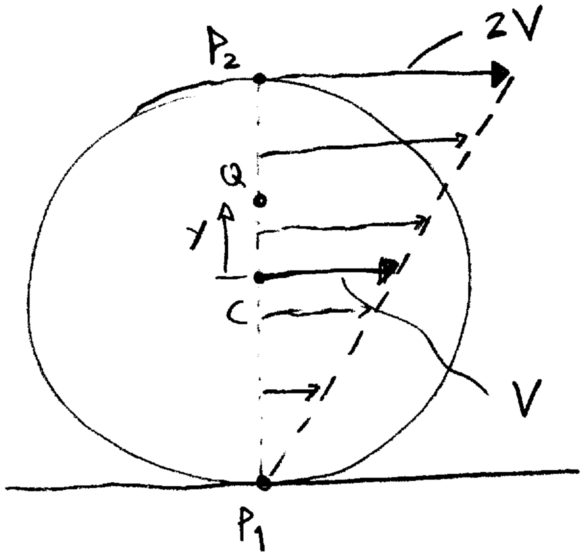
$$= \left(V_c\left(1+\frac{r}{R}\sin\alpha\right),\ -V_c\frac{r}{R}\cos\alpha,\ 0\right)$$

QUINDI $\omega_y = 0$

IN DEFINITIVA $\vec{\omega} = (0,\ 0,\ -V_c/R)$

$$\vec{V_Q} = (V_c - \omega r \sin\alpha\ ,\ \omega r \cos\alpha\ ,\ 0)$$

DISTRIBUZIONE DELLA VELOCITA RUOTA



$$V_x = V_c\left(1 + \frac{y}{R}\right)$$

IN PARTICOLARE: $y=0$ AL CENTRO

$y=-R$ SU P_1

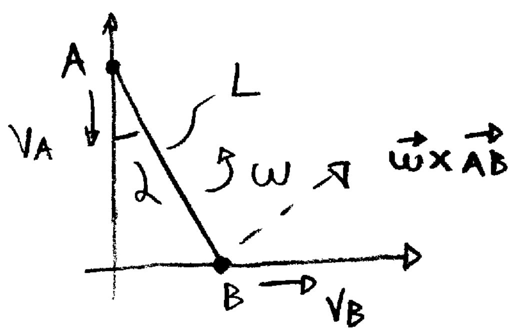
$y=R$ SU P_2

$V_x = 0$ SU P_1

$V_x = V_c$ SU C

$V_x = 2V_c$ SU P_2

ALTRO ESEMPIO: TRAVE FRA 2 CARRELLI



CONOSCENDO V_A

QUANTO VALE V_B ?

ESERCIZIO DA SVOLGERE

$$\vec{\omega} \times \vec{AB} = (\omega L \cos\alpha\ ,\ \omega L \sin\alpha)$$

$$\vec{V_B} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{AB} = (\omega L \cos\alpha\ ,\ \underbrace{-V_A + \omega L \sin\alpha}_{=0})$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{V_A}{L \sin\alpha}$$

$$V_B = \omega L \cos\alpha = \frac{V_A \cancel{L}}{\cancel{L} \sin\alpha} \cos\alpha = \frac{V_A}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

ES.: $\alpha = 45° \rightarrow V_B = V_A$

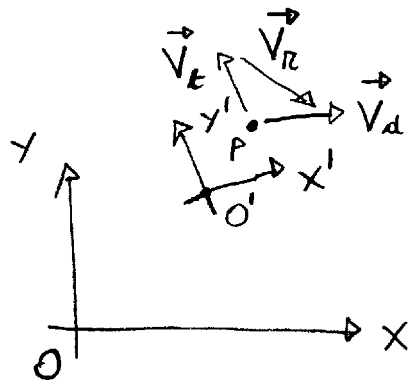
$\alpha = 90° \rightarrow V_B = 0$

$\alpha = 0° \quad V_B \rightarrow \infty$

MOTI RELATIVI — VELOCITÀ

TERMINOLOGIA: RELATIVO, ASSOLUTO, DI TRASCINAMENTO

$\nexists$ NON ESISTE UN SIS. DI RIF. PREFEREZIALE



E' COME DIRE SISTEMA 1 E SISTEMA 2

$$\vec{V}_a = \vec{V}_t + \vec{V}_r$$

$\vec{V}_a$: VEL. RISPETTO AL SISTEMA 1 (x, y)

$\vec{V}_r$: VEL. RISPETTO AL S. 2 (x, y)

$\vec{V}_t$: VEL. DI STRISCIAMENTO

È LA VEL. DEL PUNTO SOLIDALE AL SISTEMA 2 SOVRAPPOSTO A P

SE IL SISTEMA 2 E' IN MOTO ROTATORIO, LA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO E':

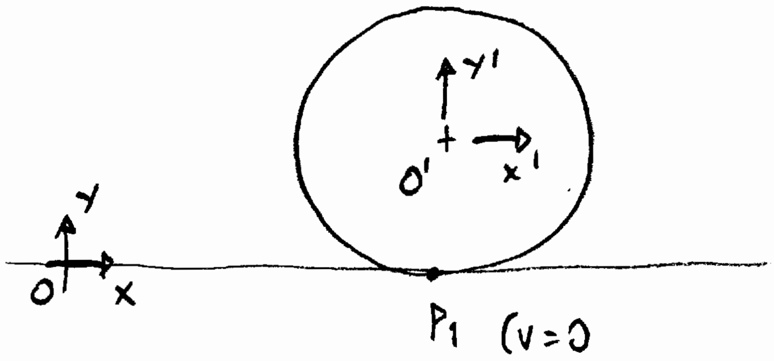
$$\vec{V}_t = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{O'P}$$

PERCHE' IL SISTEMA DI RIF. E' COME SE FOSSE UN CORPO RIGIDO

INVECE SE IL SISTEMA 2 E' IN MOTO SOLO TRASLATORIO LA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO E' SEMPRE UGUALE A QUELLA DELL'ORIGINE O' PER QUALUNQUE PUNTO P

$$\vec{V}_t = \vec{V}_{O'} \qquad \left(\text{IN EFFETTI } \vec{\omega} = 0\right)$$

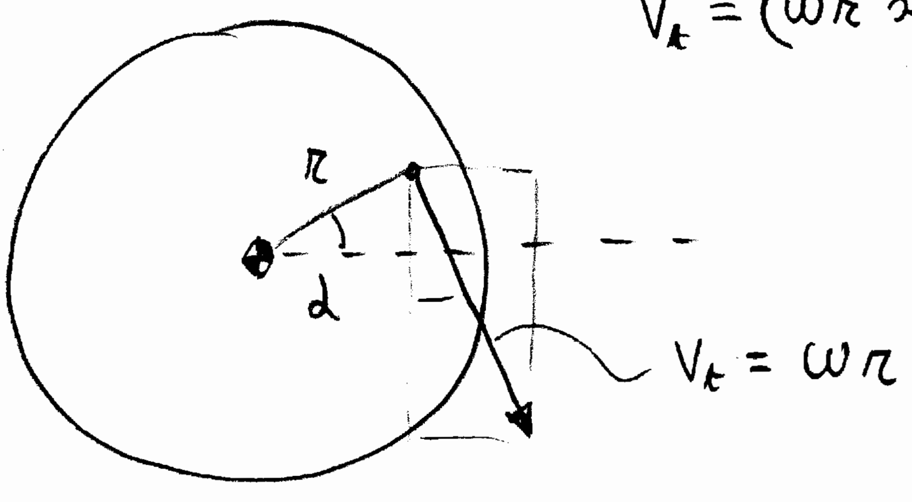
IL MOTO RELATIVO CON SISTEMA 2 SOLO TRASLATORIO (NO ROTATORIO) PUO' AIUTARE A CAPIRE IL MOTO DI UN GENERICO PUNTO DELLA RUOTA



O', x', y' TRASLA (MA NON RUOTA) E SI MUOVE SOLIDALMENTE AL CENTRO DELLA RUOTA

OSSERVANDO RISPETTO A QUESTO SISTEMA VE VEDE LA RUOTA GIRARE RISPETTO AL CENTRO

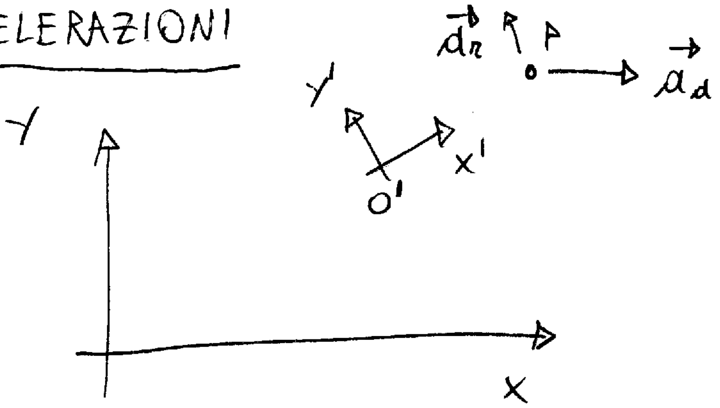
$$\vec{V}_t = (\omega r \sin\alpha, -\omega r \cos\alpha)$$



$$\vec{V}_\alpha = \vec{V}_{O'} + \vec{V}_t = (V + \omega r \sin\alpha, -\omega r \cos\alpha)$$

N.B.: SI POSSONO SOMMARE LE COMPONENTI PERCHE' LE DIREZIONI x, x' E y, y' SONO PARALLELE

ACCELERAZIONI



$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_c + \vec{a}_r$$

TRASC. — CORIOLIS — RELATIVA

$$\vec{a}_c = 2\,\vec{\omega} \times \vec{V}_r$$

$\vec{\omega}$ E' LA VEL. ANGOLARE DEL SECONDO SIST. RISPETTO AL PRIMO

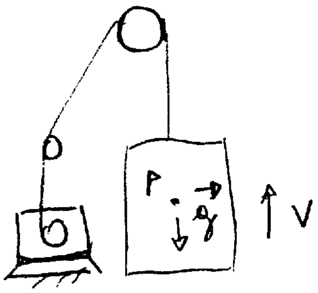
$$\vec{a}_t = \vec{a}_0 + \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}\right) \times \vec{O'P} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{O'P}\right)$$

TERMINE TANGENZIALE — TERMINE CENTRIPEDO

OVVIAMENTE CORIOLIS E' NULLA SE $\vec{V}_r = 0$

MA ANCHE SE $\vec{\omega} = 0$ (MOTO SOLO TRASLATORIO DI 1 RISPETTO A 2)

ESEMPI



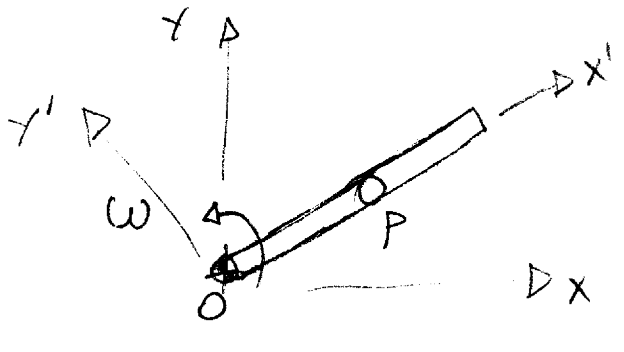
ACC. IN ASCENSORE A VEL. UNIFORME

L'ACC. DEL PUNTO P E' $\vec{g}$

SIA RISP. A SISTEMA ASSOLUTO (TERRA)

SIA " AL " DELL'ASCENSORE

— — —

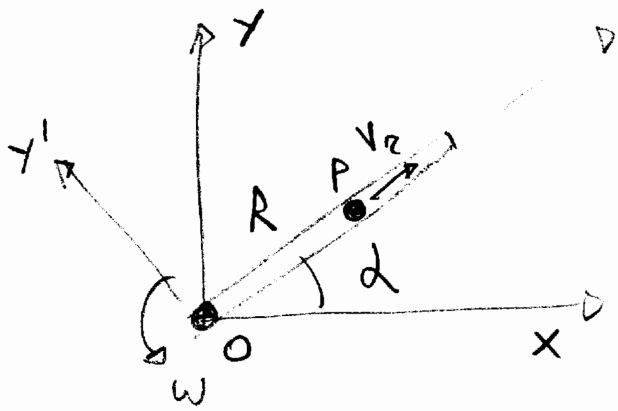


ω COSTANTE

$\vec{V}_r = 0$ (COSTANTE), $\vec{a}_r = 0$, $\vec{a}_c = 0$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t = -\omega^2\,\vec{OP}$$

TERMINE CENTRIPETO



(COSTANTE)

$\vec{V}_r \neq 0$ (COSTANTE) $\qquad \vec{a}_r = 0$

$$\vec{a}_t = -\omega^2 \vec{OP}$$

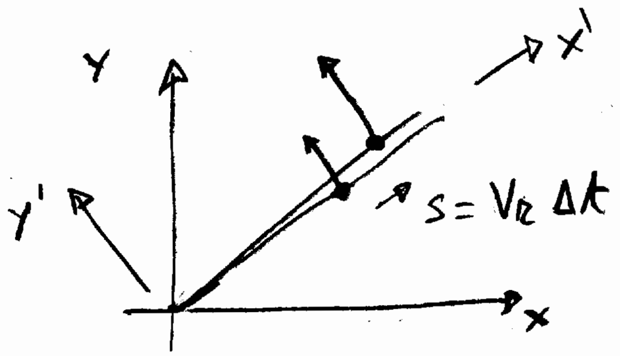
(STESSO TERMINE DEL CASO PRECEDENTE)

$$\vec{a}_c = 2 \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ 0 & 0 & \omega \\ V_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, -2 \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ V_r & 0 \end{vmatrix}, 0\right)$$

$$\vec{a}_c = (0,\ 2\omega V_r,\ 0)$$ ← VETTORE SCRITTO RISPETTO ALLE COORDINATE X', Y'

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_c = (-\omega^2 R,\ 2\omega V_r,\ 0)$$

— IL TERMINE ωV_r PUO' ESSERE INTERPRETATO COME L'EFFETTO DI SPOSTARSI IN UN CAMPO DI VELOCITA':



IN QUESTO Δt LA VELOCITÀ E' AUMENTATA

$$V_{y'}(t) = \omega r$$

$$V_{y'}(t+\Delta t) = \omega(r+s)$$

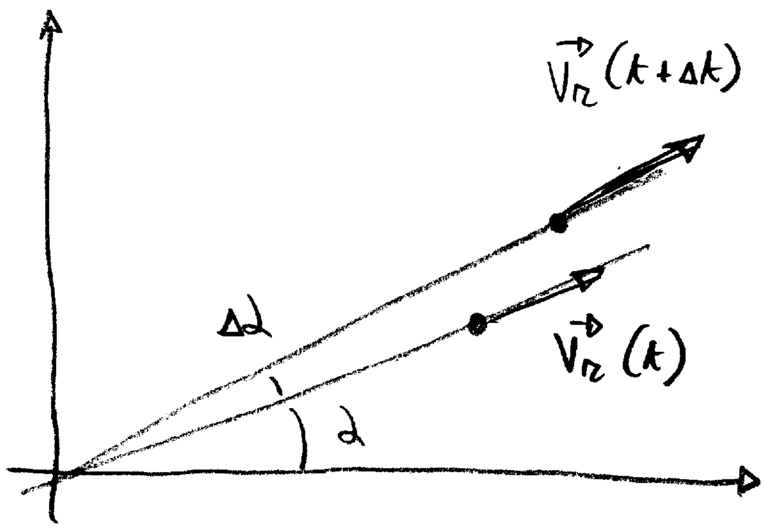
$$a_{y'} = \Delta V / \Delta t = \frac{\omega(r+s) - \omega r}{\Delta t}$$

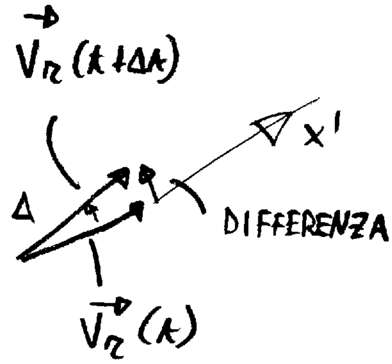
$$= \frac{\cancel{\omega r} - \cancel{\omega r} + \omega V_r \cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} = \omega V_r$$

APPARENTEMENTE IL TERMINE DI CORIOLIS SAREBBE ωV_r, IN REALTÀ E' $2\omega V_r$, PERCHE'?

IL PUNTO SI STA MUOVENDO ANCHE SECONDO x'

QUESTO VETTORE CAMBIA DI DIREZIONE :





$$\Delta V_r = V_r \, \Delta\alpha = V_r \, \omega \, \Delta t$$

$$\frac{\Delta V_r}{\Delta t} = \omega V_r$$

QUINDI QUESTO TERMINE COMPARE "DOPPIO", PERCHE' CAMBIA LA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO E CAMBIA DI ORIENTAZIONE LA VELOCITÀ RELATIVA