Meccanica e Tecnica delle Costruzioni Meccaniche
Esercitazioni del corso. Periodo II
Prof. Leonardo BERTINI
Ing. Ciro SANTUS

Esercitazione 08:

Introduzione alla cinematica e dinamica del punto materiale e del corpo rigido

---

Indice

1 Dinamica del punto materiale

Il punto materiale è un'astrazione concettuale di un sistema le cui dimensioni sono piccole rispetto alle dimensioni della traiettoria del moto che realizza. Addirittura la terra può essere considerata un punto materiale studiandone il moto intorno al sole.
Il punto materiale è caratterizzato da dimensioni di ingombro nulle, per cui la sua posizione (rispetto ad un qualsiasi sistema di riferimento) è definita, semplicemente, da una terna di coordinate: x, y, z. Il punto materiale inoltre è caratterizzato da una massa m.
Le note definizioni della cinematica sono:

- Velocità v_x, v_y, v_z:

  $$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

  in cui t è il tempo.

- Accelerazione a_x, a_y, a_z:

  $$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

La legge fondamentale della dinamica lega le componenti della *risultante* delle forze che agiscono sul punto materiale alle componenti dell'accelerazione rispetto ad un sistema di coordinate *inerziale*:

$$F_x = ma_x \qquad F_y = ma_y \qquad F_z = ma_z$$

Per le applicazioni di interesse del presente corso, un sistema di coordinate inerziale è il suolo terrestre, e quindi anche un qualsiasi altro sistema che trasla, in modo uniforme e senza ruotare, rispetto al suolo.

In Fig.1 si mostra un punto materiale di massa m che si muove lungo una traiettoria circolare, sul quale agisce l'azione F esercitata da un filo.

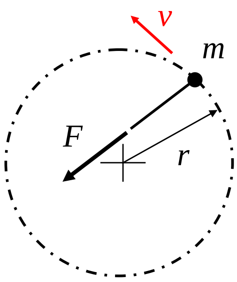

Figura 1: Punto materiale in moto lungo una traiettoria circolare.

Nel caso in cui il moto circolare sia uniforme, determinare:

1. l'angolo formato dal cavo con la tangente della traiettoria;
2. la massima velocità di rotazione senza causare il cedimento del cavo (resistenza materiale S_U, diametro filo Φ).

I dati del problema sono:

$m = 10$ kg
$r = 1$ m
$S_\mathrm{U} = 300$ MPa
$\Phi = 2$ mm

Soluzione:
La velocità periferica a cui il filo si rompe è pari a: $v_\mathrm{r} = 9.71$ m/s.

Si consideri nuovamente il punto materiale di Fig.1 che si muove lungo una traiettoria circolare, e a cui viene imposto un moto vario di accelerazione *tangenziale* a costante, mediante l'azione F del filo.
La velocità moto è variabile nel tempo:

$$v = v_0 + at \; [\mathrm{m/s}]$$

Le componenti di accelerazione, tangenziale e centrifuga, sono rispettivamente:

$$a_\mathrm{t} = a$$

$$a_\mathrm{c} = \frac{v^2}{r}$$

All'istante iniziale $t_0 = 0$ s, il corpo si muove di velocità $v_0 = 0.5$ m/s, e si imprime un'accelerazione tangenziale costante $a = 0.1\ \mathrm{m/s^2}$.
Determinare:

- La tensione agente nel cavo al tempo $t_1 = 5$ s.
- L'angolo formato dal cavo con la tangente alla traiettoria al tempo t_1.
- Il tempo t_r necessario per raggiungere la condizione di rottura del filo.

Soluzione:
Al tempo $t_1 = 5$ s la tensione sul cavo è: $\sigma_1 = 3.199$ MPa, l'angolo formato con la tangente è: $\theta_1 = 84.29°$. Infine, mantenendo l'accelerazione imposta, il tempo necessario per raggiungere la rottura del filo è: $t_\mathrm{r} = 92.1$ s.

2 Cinematica del corpo rigido

Un corpo rigido è l'insieme di più punti materiali i quali non possono modificare la loro posizione relativa. Tutti i materiali di fatto sono invece deformabili, tuttavia il modello di corpo rigido è spesso molto efficace per descrivere fenomeni dinamici dove la deformazione dei corpi è trascurabile.
Il campo di velocità istantaneo di un corpo rigido può essere espresso nella forma:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \vec{v}_{\mathrm{O}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{OP}} \tag{1}$$

Dove: $\vec{v}_{\mathrm{O}}$ è la velocità di un qualsiasi punto O del corpo rigido, $\vec{v}_{\mathrm{P}}$ è la velocità di un qualsiasi altro punto P del corpo rigido, rispetto ad un sistema di riferimento, $\vec{r}_{\mathrm{OP}}$ è il vettore dal punto O al punto P, infine $\vec{\omega}$ è il vettore velocità angolare, rispetto allo stesso sistema di riferimento, ossia come varia nel tempo l'*orientamento* del corpo rigido.

In Fig.2 si mostra una ruota che *rotola* su un piano. Dato che il moto è di rotolamento il punto della ruota a contatto con il suolo è fermo. Quindi, assumendo il sistema di riferimento x, y solidale al suolo la sua velocità è nulla: $v_{\mathrm{O}} = 0$. Inoltre la velocità del punto centrale della ruota è v_{C} con orientamento orizzontale.

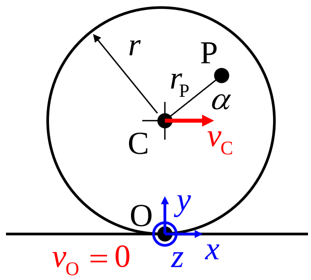

Figura 2: Moto di rotolamento di una ruota rispetto ad un piano.

Determinare la velocità angolare $\vec{\omega}$, conoscendo v_{C} e r, e tenendo conto che il moto della ruota è piano. Inoltre determinare la velocità v_{P} del punto P.

Soluzione:
La velocità angolare è:

$$\vec{\omega} = \left(0, 0, -\frac{v_{\mathrm{C}}}{r}\right)$$

La velocità del punto P è:

$$\vec{v}_{\mathrm{P}} = \left(v_{\mathrm{C}} + v_{\mathrm{C}}\frac{r_{\mathrm{P}}}{r}\sin\alpha, -v_{\mathrm{C}}\frac{r_{\mathrm{P}}}{r}\cos\alpha, 0\right)$$

Derivando, nel tempo, l'Eq.1 si può scrivere il campo di accelerazione istantaneo di un corpo rigido:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{O}} + \vec{\gamma} \times \vec{r}_{\mathrm{OP}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{OP}}) \tag{2}$$

in cui $\vec{\gamma}$ è il vettore derivata della velocità angolare, ossia l'accelerazione angolare:

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

Nel caso in cui il punto O sia fermo e abbia accelerazione nulla, il termine $\vec{\gamma} \times \vec{r}_{\mathrm{OP}}$ rappresenta l'accelerazione tangenziale e il termine $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{OP}})$ rappresenta l'accelerazione centripeta.

Con riferimento alla Fig.2, assumendo che l'accelerazione del punto C sia nulla, determinare l'accelerazione del punto P.

Soluzione:
L'accelerazione del punto P è:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = -\left(\frac{v_{\mathrm{C}}}{r}\right)^2 \vec{r}_{\mathrm{CP}}$$

Nel caso in cui il punto C sia dotato di velocità v_C e di accelerazione tangenziale a_C, determinare l'accelerazione del punto P.

Soluzione:

$$\vec{a}_P = \begin{pmatrix} a_C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_C(r_P/r)\sin\alpha \\ -a_C(r_P/r)\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} - \left(\frac{v_C}{r}\right)^2 \begin{pmatrix} r_P\cos\alpha \\ r_P\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se al punto P è fissata una massa m, determinare l'azione che la ruota esercita su tale punto materiale.
Dati:

$m = 10$ g
$v_C = 70$ km/h
$a_C = 0.15$ m/s^2
$r = 200$ mm
$r_P = 150$ mm
$\alpha = 30°$

Soluzione:

$F_P = 14.177$ N