DINAMICA

LEZ. 3

I LEGGE DELLA DINAMICA: LEGGE D'INERZIA

UN SISTEMA DI RIF. SI DICE <u>INERZIALE</u> SE OGNI PUNTO MATERIALE ISOLATO (CIOE' CHE NON SUBISCE FORZE) APPARE FERMO O IN MOTO RETTILINEO UNIFORME

ALCUNE OSSERVAZIONI:

- MOTO FERMO E' UN CASO DI M. RET. UNIFORME

- UN PUNTO MATERIALE PERFETTAMENTE ISOLATO NON ESISTE

- UN'OTTIMA APPROSSIMAZIONE DI SISTEMA INERZIALE, PER PROB. ING. MECCANICA E' IL SUOLO TERRESTRE (A VOLTE SI FA RIFERIMENTO ALLE STELLE FISSE)
- INDIVIDUATO UN SISTEMA INERZIALE GLI ALTRI SIST. INERZIALI SOTTO TUTTI E SOLI QUELLI SI MUOVONO DI MOTO TRASLATORIO (NON ROTATORIO) UNIFORME
  ES. AUTOMOBILE A VEL. COSTANTE (NO FRENATA, ACCEL.) E NON IN CURVA

- SPESSO SI IDENTIFICA UN SISTEMA ASSOLUTO COME INERZIALE MA SI TRATTA SOLO DI UN'ASSUNZIONE DI COMODO, ASSOLUTO - RELATIVO E' COME DIRE SISTEMA DI RIF. 1 E 2

II LEGGE DELLA DINAMICA: LEGGE DI NEWTON

RISPETTO AD UN SIST. DI RIFERIMENTO INERZIALE UN PUNTO MATERIALE SUBISCE UN'ACCELERAZIONE PROPORZIONALE ALLA FORZA (RISULTANTE) APPLICATA

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$ E' LA STESSA ACC. IN OGNI SIST. INERZIALE

DA QUESTA LEGGE SI DEDUCE POI LA DINAMICA ANCHE DEL CORPO RIGIDO

VEDIAMO DOPO

III LEGGE DELLA DINAMICA: PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE

L'INTERAZIONE (FORZA) FRA DUE CORPI E' SEMPRE MUTUA, SE UN CORPO (O UN PUNTO) ESERCITA UNA FORZA SU UN ALTRO QUEST'ULTIMO ESERCITÀ UNA FORZA UGUALE E CONTRARIA ED ALLINEATA (COPPIA DI BRACCIO NULLO)

QUESTO PRINCIPIO RIGUARDA, IN REALTÀ, LE FORZE, INDIPENDENTEMENTE DAL MOTO O QUIETE DEL PUNTO O DEL CORPO,

QUINDI OVVIAMENTE RIGUARDA ANCHE LA STATICA

DINAMICA DEI SISTEMI RELATIVI

ASSUMENDO DI OSSERVARE IL PUNTO MATERIALE RISPETTO AD UN OSSERVATORE NON INERZIALE :

$$\vec{a}_a = \vec{a}_t + \vec{a}_c + \vec{a}_r$$

R NON INERZIALE

PER LA LEGGE DI NEWTON

$$\vec{F} = m \vec{a}_a = m \vec{a}_t + m \vec{a}_c + m \vec{a}_r$$

INERZIALE

SI PUO' RISCRIVERE :

$$\vec{F} + \vec{F}_t^{(a)} + \vec{F}_c^{(a)} = m \vec{a}_r$$

$$\vec{F}_t^{(a)} = - m \vec{a}_t$$

$$\vec{F}_c^{(a)} = - m \vec{a}_c$$

FORZE APPARENTI DI TRASC. E DI CORIOLIS

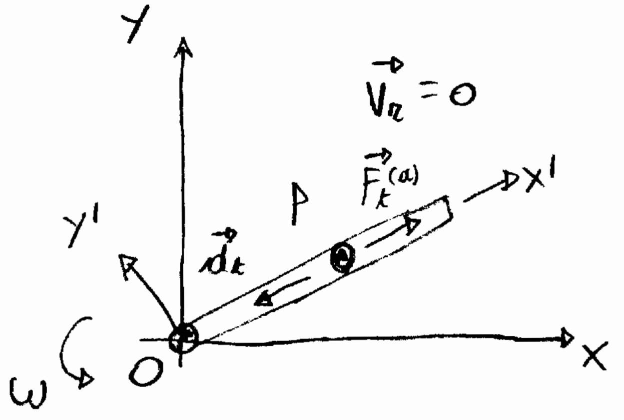
QUESTE NON SONO FORZE VERE E INFATTI NON RISPONDONO AL PRINCIPIO DI AZ.-REAZ.

SI RECUPERA PERO' LA FORMA

$$\sum \vec{F}_i = m \vec{a}_r$$

ACC. OSSERVATA

ES. 1



$$\vec{F} + \vec{F}_t^{(a)} + \cancel{\vec{F}_c^{(a)}} = m\,\cancel{\vec{a}_r}$$

$\vec{V}_r = 0$

ACC. CENTRIP.

$$\vec{F}_t^{(a)} = -m\,\vec{a}_t$$

$$= m\,\omega^2\,\vec{OP}$$

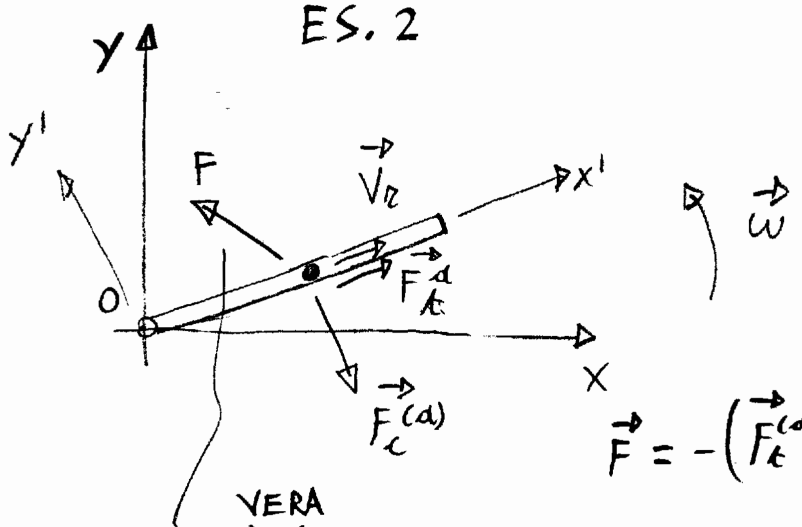
FORZA CENTRIFUGA

SE NON AGISCE UNA $\vec{F}$ (VERA) IN GRADO DI CONTRASTARE $\vec{F}_t^{(a)}$ IL CORPO SUBIRÀ UN'ACC. <u>RELATIVA</u> NON NULLA

LA VERA FORZA E' $\vec{F}$ (CENTRIPETA)

<u>QUELLA CENTRIFUGA E' APPARENTE</u>

ES. 2



COORD. X', Y', Z

$$\vec{F}_t^{(a)} = \left(m\,\omega^2 R,\ 0\right)$$

$$\vec{F}_c^{(a)} = \left(0,\ -2m\,\omega\,V_r\right)$$

$$\vec{F} + \vec{F}_t^{(a)} + \vec{F}_c^{(a)} = 0$$

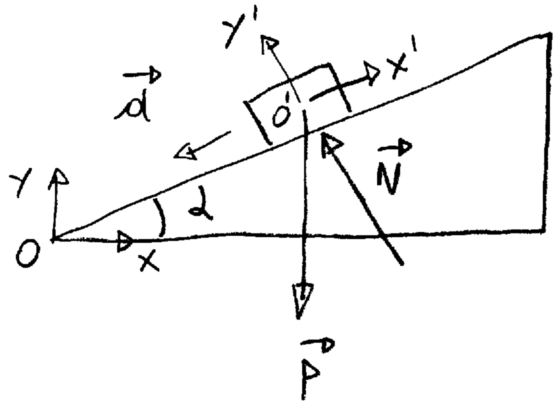
$$\vec{F} = -\left(\vec{F}_t^{(a)} + \vec{F}_c^{(a)}\right) = \left(-m\,\omega^2 R,\ 2m\,\omega\,V_r\right)$$

FORZA VERA NECESSARIA PER CONTRASTARE LE DUE FORZE APPARENTI E GARANTIRE MOTO RETTILINEO UNIFORME IN UN SIST. DI RIF. NON INERZIALE

N.B.: ANCHE SE $\vec{V}_r$ RIMANE COSTANTE IL TERMINE CENTRIPETO / CENTRIFUGO CONTINUA A CAMBIARE PER EFFETTO CHE CAMBIA R

ES. 3

PIANO INCLINATO (LISCIO)



$\vec{P}$: FORZA PESO

$P = m\,g$ ← ACC. TERRESTRE $= 9.81\ m/s^2$

↑ MASSA TOTALE

$\vec{N}$ E' LA FORZA DI REAZIONE DEL PIANO PERPENDICOLARE AL PIANO STESSO

$\vec{a}$ E' L'ACC. DEL CORPO

IL SISTEMA x', y' SEGUE IL CORPO, TRASLA (ACCELERANDO) MA NON RUOTA

$$\vec{F} + \vec{F}_t + \cancel{\vec{F}_c} = 0$$

$\vec{a}_r = 0$ PERCHE' IL SIST. DI RIFERIMENTO INSEGUE IL CORPO

RISULTANTE DELLE FORZE VERE: $\vec{P}, \vec{N}$

NON CI SONO ROTAZIONI

$$\vec{F}_t = -m\,\vec{a}_t$$

LA a_t (TRASCINAMENTO) E' LA $\vec{a}$ DEL CORPO

IN COORDINATE x', y'

$$\vec{a} = (-a, 0)$$

$$\vec{F}_t = (m a, 0)$$

$$\vec{P} = (-P\sin\alpha, -P\cos\alpha)$$

$$\vec{N} = (0, N)$$

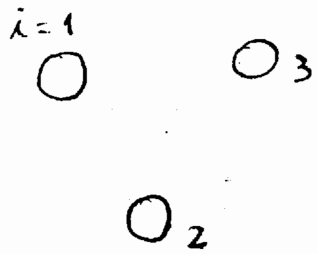
$$\longrightarrow \left|\begin{array}{l} -P\sin\alpha + m a = 0 \\ -P\cos\alpha + N = 0 \end{array}\right.$$

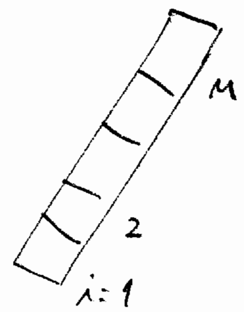
SOLUZ.:

$N = P\cos\alpha$

$a = \dfrac{P}{m}\sin\alpha = g\sin\alpha$

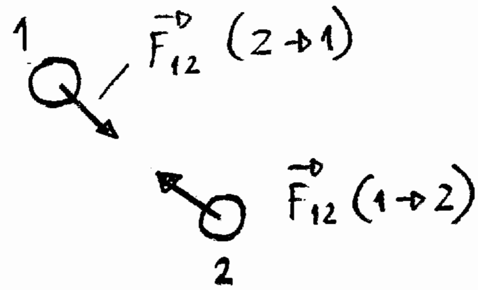
DINAMICA DEI SISTEMI



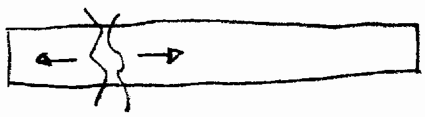


SISTEMI: PIÙ CORPI/P.TI MATERIALI, ANCHE UN CORPO RIGIDO E' UN SISTEMA

FORZE INTERNE / FORZE ESTERNE

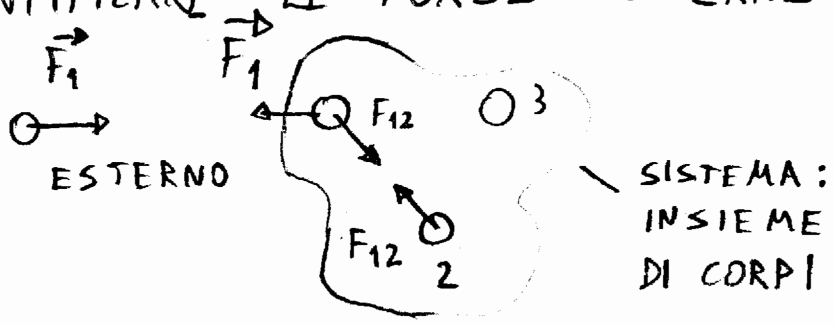


TUTTE LE FORZE INTERNE SONO COPPIE DI BRACCIO NULLO, QUINDI COMPLESSIVAMENTE COSTITUISCONO SEMPRE UN SISTEMA EQUILIBRATO: RISULTANTE NULLA E MOMENTO RISULTANTE NULLO RISPETTO A QUALUNQUE POLO



ANCHE IN UN CORPO RIGIDO SI HANNO LE FORZE INTERNE, CHE POI NELLA TEORIA DELLE TRAVI SONO LE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

PER SCRIVERE LE EQUAZIONI DI MOTO E' NECESSARIO IDENTIFICARE LE FORZE ESTERNE



LA $\vec{F}_1$ E' ESTERNA, OVVIAMENTE SE CONSIDERASSI ANCHE L'ALTRO CORPO DIVENTERREBBE INTERNA

BARICENTRO

E' LA MEDIA PESATA DELLA POSIZIONE DI TUTTE LE MASSE DEL SISTEMA

$$x_G = \frac{\sum x_i m_i}{m} \quad , \qquad m = \sum m_i$$

INTERA MASSA DEL SISTEMA

ANALOGO y_G, z_G

I CARDINALE DELLA DINAMICA

$$\vec{R} = m\, a_G$$

- SISTEMA <u>INERZIALE</u>
- $\vec{R}$: RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE, IN REALTÀ CONSIDERANDO ANCHE FORZE INTERNE LA $\vec{R}$ NON CAMBIA PERCHE' SI ANNULLANO A 2 A 2
- $\vec{a}_G$: ACCELERAZIONE DEL BARICENTRO

$$\vec{a}_G = \frac{d}{dt}\vec{V}_G \quad , \qquad \vec{V}_G = \frac{d}{dt} G$$

$$\hookrightarrow \vec{a}_G = \frac{d^2}{dt^2} G$$

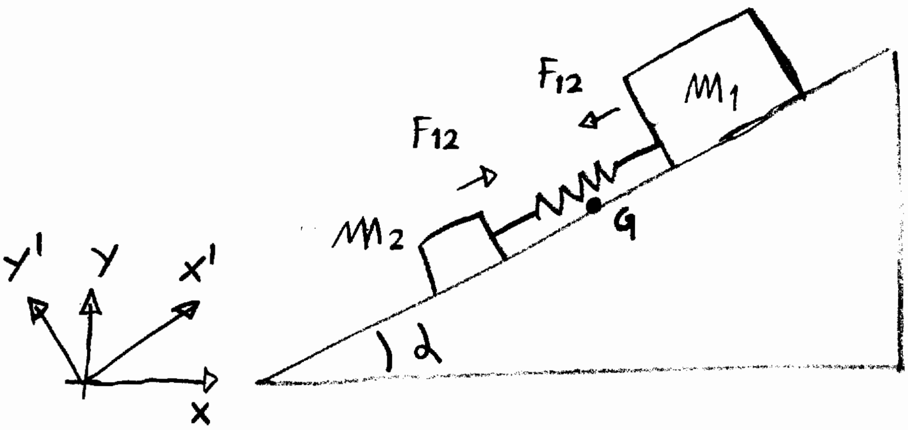
POSIZIONE DEL B.:

$$G = (x_G, y_G, z_G)$$

ACC. E VELOCITA' SI POSSONO ANCHE RITROVARE COME MEDIE PESATE DI ACC. E VEL. DELLE SINGOLE MASSE:

$$\vec{V}_G = \frac{\sum m_i \vec{V}_i}{m} \quad , \qquad \vec{a}_G = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{m}$$

ES. 4



$F_{12} = K\,\Delta L$

$\uparrow$

VARIAZIONE LUNGHEZZA DELLA MOLLA RISPETTO ALLA POSIZIONE DI RIPOSO

SI RIPETE IL CALCOLO PER LE SINGOLE MASSE:

$$a_1 = -g \sin\alpha - \frac{K\,\Delta L}{m_1}$$

COMPONENTE SECONDO x'

$$a_2 = -g \sin\alpha + \frac{K\,\Delta L}{m_2}$$

F_{12} E' UNA FORZA INTERNA SE CONSIDERO L'INTERO SISTEMA (m_1, m_2)

$$a_G = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{-m_1 g \sin\alpha - K\,\Delta L - m_2 g \sin\alpha + K\,\Delta L}{m_1 + m_2}$$

$$= -g \sin\alpha$$

NON DIPENDE DALLA FORZA DELLA MOLLA

SI RIOTTIENE LO STESSO RISULTATO: CONSIDERANDO IL MOTO DEL BARICENTRO NON HANNO EFFETTO LE F. INTERNE, SOLO QUELLE <u>ESTERNE</u>

II CARDINALE

$$\vec{M}_Q = \frac{d}{dt}\vec{L}_Q + m\,\vec{V}_Q \times \vec{V}_G$$

— SISTEMA INERZIALE

— $\vec{M}_Q$: MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE (ANCHE QUA LE F. INTERNE NON DAREBBERO CONTRIBUTO) RISPETTO AD UN POLO Q
PER ADESSO LA SCELTA DEL POLO E' DEL TUTTO ARBITRARIA

— $\vec{L}_Q$: MOMENTO ANGOLARE O MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO E' LA SOMMA DEI MOMENTI DELLE Q. DI MOTO DI TUTTE LE MASSE DEL SISTEMA

$$\vec{L}_Q = \sum \vec{QP_i} \times m_i \vec{V}_i$$

N.B.: IN QUESTO CASO FARE LA SOMMA DEI MOMENTI DELLE ACCELERAZIONI NON COINCIDE CON LA DERIVATA DEL MOMENTO ANGOLARE, IN GENERALE, SE $\vec{V}_Q \neq 0$

$$\sum \vec{QP_i} \times m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt}\vec{L}_Q + \underbrace{m\,\vec{V}_Q \times \vec{V}_G}$$

DI FATTO E' PROPRIO QUESTO IL TERMINE A DESTRA DELLA II CARDINALE

C'E' QUESTO TERMINE EVENTUALMENTE NON NULLO

IL TERMINE $\vec{V}_Q \times \vec{V}_G$ PUO' ESSERE NULLO

ES.:

→ $\vec{V}_Q = 0$ (POLO Q FISSO)

→ $Q \equiv G$ CIOE' SI PRENDE COME POLO IL BARICENTRO

IN QUESTI CASI LA II^a CARDINALE SI RIDUCE A:

$$\vec{M}_Q = \frac{d}{dt}\vec{L}_Q \qquad \left(\text{CHE HA LA STESSA FORMA DI } \vec{F} = m\vec{a}\right)$$

FAREMO RIFERIMENTO SOLO A QUESTI CASI

IN ALCUNI CASI PUO' ESSERE UTILE SCRIVERE LE CARDINALI IN UN SISTEMA NON INERZIALE, SI DEVONO PERO' INTRODURRE LE FORZE APPARENTI RISULTANTI

I CARDINALE NON INERZIALE

$$\vec{R} + \vec{R}_t + \vec{R}_c = m\,\vec{a}_G \quad \text{ACC. RELATIVA}$$

RISULTANTI: TRASCINAMENTO, CORIOLIS

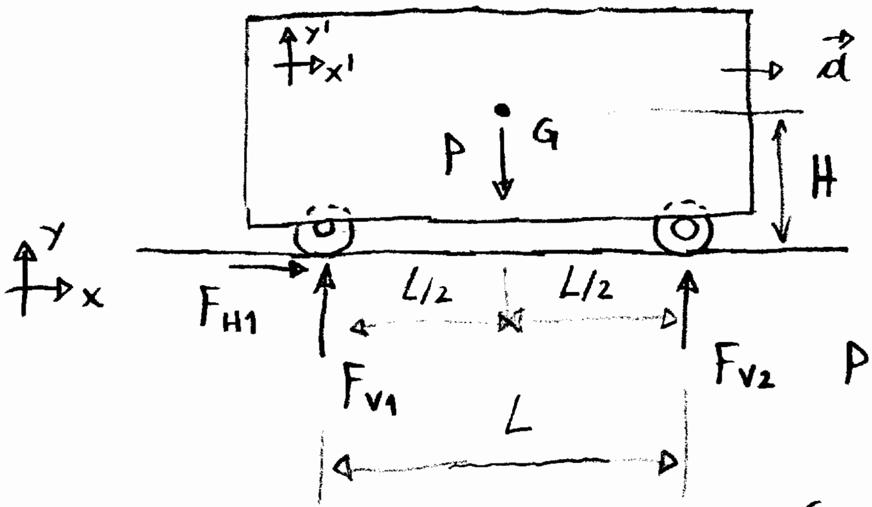
II CARDINALE NON INERZIALE

VELOCITA' RELATIVE

$$\vec{M}_Q + \vec{M}_{tQ} + \vec{M}_{cQ} = \frac{d}{dt}\vec{L}_Q + m\,\vec{V}_Q \times \vec{V}_G$$

SPESSO SI USA UN SIST. NON INERZIALE SEMPLICEMENTE PER RICONDURSI AD UN CASO DI STATICA E QUINDI ANNULLARE IL SECONDO TERMINE DI I E II CARDINALE, DOVENDOSI CALCOLARE PERO' LE F. APPERENTI E I LORO MOMENTI

ESEMPIO SIST. NON INERZIALE



CALCOLARE F_{V1}, F_{H1}, F_{V2}

- $\vec{a} = 0$
- $\vec{a} \neq 0$

$P = mg$ (PESO)

NEL CASO $\vec{a} = 0$, I SIST. x, y (SUOLO) E x', y' (VEICOLO) SONO ENTRAMBI INERZIALI

I, II CARDINALI DELLA STATICA

$$\begin{cases} F_{H1} = 0 \\ F_{V1} + F_{V2} - P = 0 \\ -P\,L/2 + F_{V2}\,L = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} F_{H1} = 0 \\ F_{V1} = F_{V2} = P/2 \end{array}$$

POLO: CENTRO RUOTA 1

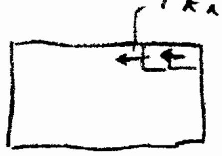
NEL CASO $\vec{a} \neq 0$: $\quad \vec{a} = (a, 0, 0)$

SI PUO' USARE LE CARD. DINAMICHE OPPURE LE CARDINALI STATICHE NEL SIST. NON INERZIALE

SIST. <u>NON</u> INERZ. x', y'

$$F_{H1} - m a = 0$$
$$F_{V1} + F_{V2} - P = 0$$
$$-P\,L/2 + F_{V2}\,L + m a H = 0$$

ANALOGO AL PESO:
EQUIVALENTE ALLA RISULTANTE APPLICATA A G



$\vec{F}_{Ti} = -m_i \vec{a}_T$

NON ESSENDOCI ROTAZIONE $\vec{a}_T = \vec{a}$ IN TUTTI I PUNTI

$$\vec{R}_T = \sum \vec{F}_{Ti} = -m\vec{a} = (-ma, 0, 0)$$

SI RISOLVE:

$$F_{H1} = m a$$

$$F_{V2} = \frac{P}{2} - m a \frac{H}{L}$$

PUO' ESSERE INTERPRETATO COME "TRASFERIMENTO DI CARICO"

$$F_{V1} = P - F_{V2} = \frac{P}{2} + m a \frac{H}{L}$$

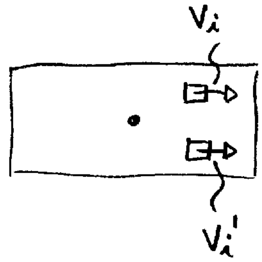
VOLENDO RISOLVERE RISPETTO AD UN SISTEMA INERZIALE:

$$\vec{R} = m \vec{a}_G$$

$$\vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{L}_G + \cancel{m \vec{V}_G \times \vec{V}_G}$$

SCELGO COME POLO IL BARICENTRO G

IN QUESTO CASO $\vec{L}_G$ É SEMPRE NULLO PERCHE' IL MOTO E' SOLO TRASLATORIO



$$\vec{L}_G = \sum \vec{GP_i} \times m \vec{V_i} =$$

$$= \left(\sum \vec{GP_i}\, m\right) \times \vec{V}$$

STESSA VELOCITA' PER TUTTI I PUNTI

$$= m \cancel{\vec{GG}} \times \vec{V}$$

$$= 0 \quad \left(\text{ANCHE SE CAMBIA } \vec{V}\right)$$

M PERO' VA CALCOLATO RISPETTO A $\underline{\underline{G}}$!

$$\begin{cases} F_{H1} = m a \\ F_{V1} + F_{V2} - P = 0 \\ F_{H1} H - F_{V1} L/2 + F_{V2} L/2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{H1} = m a \\ F_{V1} = P - F_{V2} \\ m a H - (P - F_{V2}) L/2 + F_{V2} L/2 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad F_{H1} = m a, \quad F_{V2} = \frac{P}{2} - m a \frac{H}{L}, \quad F_{V1} = \frac{P}{2} + m a \frac{H}{L}$$