

# Esercitazione 11:

## Stato di tensione nella sezione di trave

---

### Indice

<b>1 Forza normale</b>	<b>1</b>
<b>2 Flessione retta</b>	<b>3</b>
2.1 Calcolo del momento secondo e del modulo di flessione per alcune sezioni notevoli	4
2.2 Teorema del trasporto per il calcolo del momento secondo di area . . . . .	5
<b>3 Forza normale eccentrica</b>	<b>6</b>
<b>4 Flessione deviata</b>	<b>7</b>
<b>5 Torsione</b>	<b>8</b>
5.1 Torsione di una sezione circolare . . . . .	8
5.2 Torsione di sezioni a parete sottile, modello di Bredt . . . . .	10
<b>6 Taglio, formula di Jourawski</b>	<b>11</b>

### 1 Forza normale

Nel caso di una trave sollecitata a forza normale, si sviluppano delle tensioni normali in direzione dell'asse della trave (generalmente indicato come asse  $z$ ) di distribuzione uniforme, Fig.1. Lo stato di sollecitazione pertanto è semplicemente:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1)$$

Inoltre per equilibrio è immediato che:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{A} \quad (2)$$

In cui  $N_z$  è la caratteristica di trazione in corrispondenza della generica posizione  $\xi$  lungo l'asse della trave.

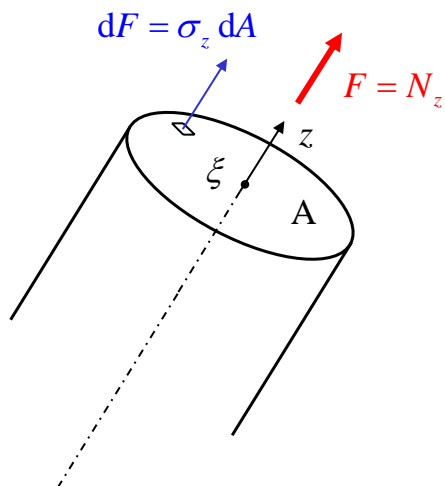


Figura 1: Stato di sollecitazione in una sezione di trave sollecitata a forza normale.  $\sigma_z$  uniformemente distribuita su tutta la sezione  $A$ .

In Fig.2(a) si mostra un prisma soggetto a peso proprio, mentre in Fig.2(b) una sequenza di blocchi di massa  $m = 10 \text{ kg}$  (accelerazione di gravità  $g = 9.81 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ) e collegati da elementi di filo di sezione  $d = 10 \text{ mm}$ .

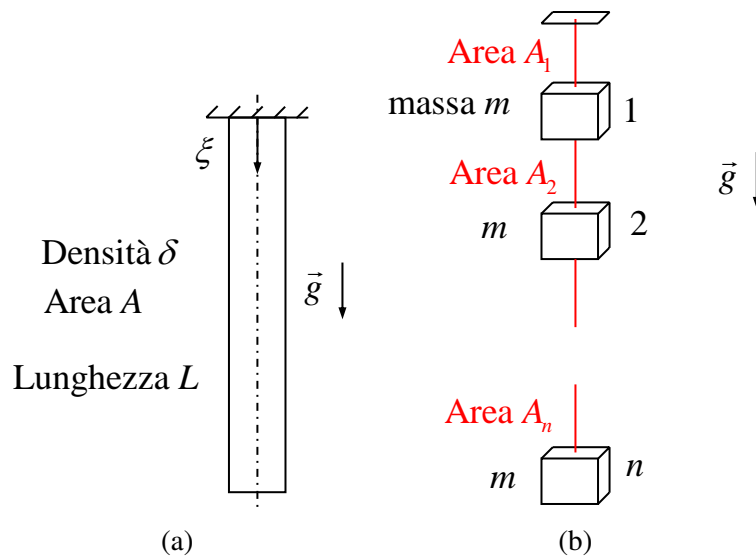


Figura 2: (a) Prisma soggetto a peso proprio. (b) Sequenza di blocchi soggetti a peso proprio, elementi di filo in trazione.

Determinare lo tensione di trazione: (a) nelle varie sezioni del prisma, (b) su ciascun elemento di filo.



## 2 Flessione retta

Ogni sezione ammette due assi principali. Ad esempio, sezioni a doppia simmetria (Fig.3) hanno come assi principali gli stessi assi di simmetria.

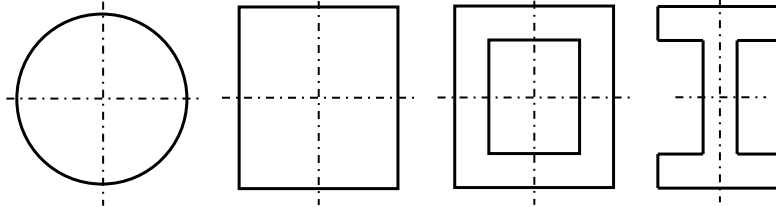


Figura 3: Esempi di sezione a doppia simmetria.

Si parla di flessione *retta* nel caso in cui, in corrispondenza della sezione della trave considerata, agisce un momento flettente con retta d'azione coincidente con uno dei due assi principali (ad esempio asse  $x$  di Fig.4).

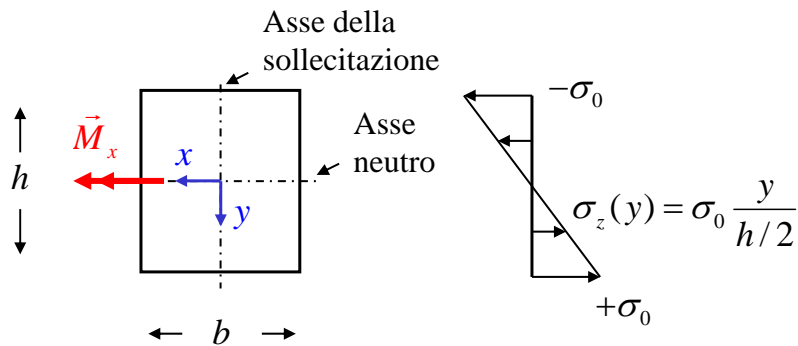


Figura 4: Sezione a doppia simmetria sottoposta ad un momento flettente, secondo una direzione principale.

In tali condizioni si sviluppa uno stato di tensione triangolare, detto *a farfalla* (o *di Navier*) di tensioni normali secondo la direzione  $z$  e l'asse neutro di tale distribuzione è lo stesso asse principale baricentrico.

Lo stato di tensione ammette solo la componente secondo  $\sigma_z$ :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

La distribuzione di  $\sigma_z$  non è uniforme ma segue la legge:

$$\sigma_z = \sigma_0 \frac{y}{h/2} \quad (4)$$

Rimane infine da legare il parametro  $\sigma_0$  alla sollecitazione esterna  $M_x$ .

Per l'equilibrio a momento secondo  $x$ :

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A \sigma_0 \frac{y}{h/2} y dA = \sigma_0 \frac{\int_A y^2 dA}{h/2} \quad (5)$$

Il termine  $\int_A y^2 dA$  è per definizione il momento secondo dell'area  $A$  rispetto all'asse *baricentrale* parallelo ad  $x$ , indicato come  $I_x$ , di unità di misura [ mm<sup>4</sup> ]. Esistono semplici formule (come

vedremo) per determinare  $I_x$  per le sezioni più semplici.

Infine  $h/2$  è l'ingombro della sezione secondo la direzione dell'asse della sollecitazione, vedi Fig.4.

Risulta spesso conveniente ridefinire il termine:

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} \quad (6)$$

che viene indicato come modulo di flessione, rispetto ad  $x$ , della sezione. Per cui si ha:

$$\sigma_0 = \frac{M_x}{W_x} \quad (7)$$

Di seguito verranno presentati semplici esempi di calcolo di  $I_x$  e  $W_x$  per sezioni notevoli.

## 2.1 Calcolo del momento secondo e del modulo di flessione per alcune sezioni notevoli

Consideriamo la semplice sezione rettangolare di Fig.4 di altezza  $h$  e base  $b$ , per semplice integrazione segue che:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 \quad (8)$$

quindi il modulo di flessione

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 \quad (9)$$

Un'altra sezione di notevole interesse è la sezione circolare di diametro  $d$ .

Si trova che il momento secondo di area è:

$$I_x = \frac{\pi}{64}d^4 \quad (10)$$

ed inoltre:

$$W_x = \frac{\pi}{32}d^3 \quad (11)$$

---

Determinare  $I_x$  e  $W_x$  per le sezioni cave di Fig.5.

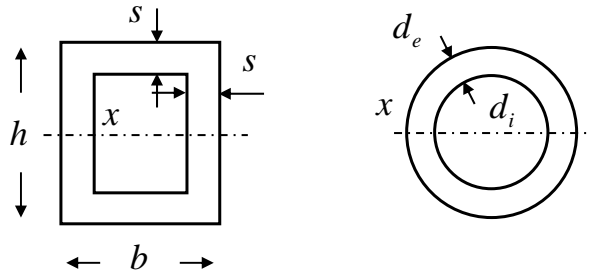


Figura 5: Sezioni rettangolare circolare cave.

*Suggerimento:* notare che la proprietà di sezione  $I_x$  è additiva (in quanto è definita come un integrale), considerare per cui le aree mancanti come contributo da sottrarre al momento secondo dovuto dell'area esterna.



## 2.2 Teorema del trasporto per il calcolo del momento secondo di area

Nei casi presentati fino ad ora, è stato sempre calcolato il momento secondo di area rispetto ad un suo asse baricentrico. Esistono dei casi in cui per una porzione di area è necessario calcolare il momento secondo di area rispetto ad un asse non passante per il baricentro.

Il teorema del trasporto permette di calcolare il momento secondo di area rispetto ad un asse non baricentrico, di una sezione, conoscendo quello rispetto ad un asse baricentrico parallelo, Fig.6.

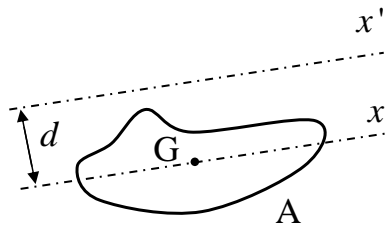


Figura 6: Sezione generica, asse baricentrico  $x$ , asse non baricentrico  $x'$ .

Per il teorema del trasporto vale la relazione:

$$I_{x'} = I_x + Ad^2 \quad (12)$$

Si consideri la sezione 'a doppio T' (molto spesso utilizzata nelle costruzioni, in particolare civili) le cui dimensioni sono riportate in fig.7

Determinare  $I_x$ , nei seguenti tre modi:

1. utilizzare il contributo negativo delle aree mancanti, come nell'esercitazione precedente;

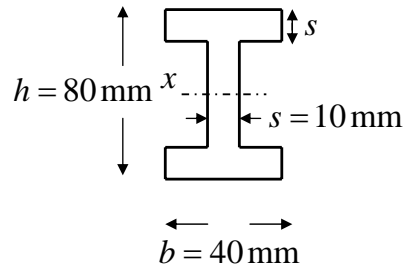


Figura 7: Sezione generica 'a doppio T'.

- considerare separatamente tre aree, le due laterali (dette ali) e quella centrale (detta anima) come singole aree rettangolari. Utilizzare quindi il teorema del trasporto per le due aree delle ali, al fine di valutare il momento secondo di area rispetto all'asse  $x$  dell'intera sezione.



*Soluzione:*

$$I_x = 1.167 \times 10^6 \text{ mm}^4.$$

### 3 Forza normale eccentrica

Come ben noto sulla stessa sezione della trave possono agire allo stesso tempo due o più caratteristiche della sollecitazione non nulle.

Nell'ipotesi di comportamento lineare del materiale è possibile utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. Per cui lo stato di sollecitazione non è altro che quello ottenuto sovrapponendo i singoli contributi delle singole caratteristiche della sollecitazione.

In particolare per quanto riguarda la composizione fra forza normale e flessione la distribuzione di tensioni secondo  $z$  generata dalla forza normale.

---

In Fig.8 si rappresenta il classico problema del gancio, in cui il carico  $\vec{F}$  presenta un'eccentricità  $r$  rispetto all'asse dello stelo.

Determinare, nella generica sezione dello stelo, lo stato di sollecitazione.

Individuare il punto che subisce la tensione  $\sigma_z$  massima.

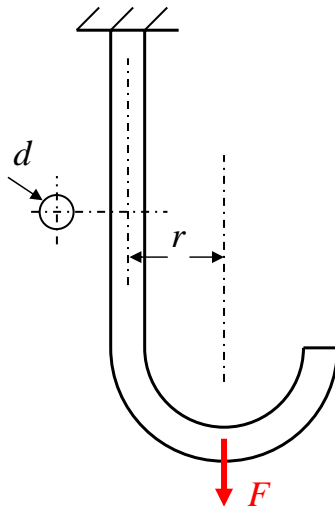


Figura 8: Problema del gancio, tipico caso di forza normale eccentrica.



#### 4 Flessione deviata

Si ha flessione deviata nel caso in cui il momento flettente agisce secondo una direzione *non* principale. In tal caso l'asse neutro non ha la stessa direzione della retta d'azione del momento flettente (come invece avviene per la flessione retta, Fig.4). Tuttavia, è possibile scomporre il momento flettente in due componenti secondo le due direzioni principali e applicare il principio di sovrapposizione degli effetti (valido nell'ipotesi di non linearità).

In Fig.9 la sezione a doppio T (dimensioni di Fig.7) è sollecitata con un momento flettente secondo una direzione non principale. Determinare la tensione di flessione  $\sigma_{zz}$  nei punti: A, B, C, D, e la direzione dell'asse neutro (angolo  $\beta$ ).

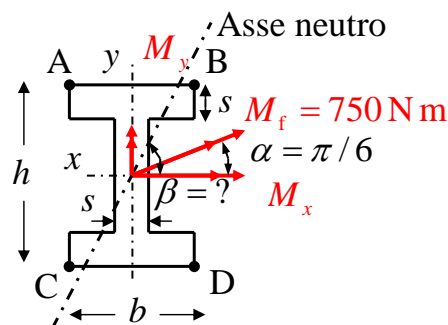


Figura 9: Sezione doppio T, sollecitazione di flessione deviata.



*Soluzione:*

- Componenti di momento:  $M_x = 649\,519\text{ N mm}$ ,  $M_y = 375\,000\text{ N mm}$ .
- Momenti secondi:  $I_x = 1.167 \times 10^6\text{ mm}^4$ ,  $I_y = 0.1667 \times 10^6\text{ mm}^4$ .
- Moduli di flessione:  $W_x = I_x/(h/2) = 29.167 \times 10^3\text{ mm}^3$ ,  $W_y = I_y/(b/2) = 8.333 \times 10^3\text{ mm}^3$ .
- Componenti di tensione:  $M_x/W_x = 22.3\text{ MPa}$   
 $M_y/W_y = 45.0\text{ MPa}$
- Tensione ai vertici della sezione:
 

A	$\sigma_{zz} = 67.3\text{ MPa}$
B	$\sigma_{zz} = -22.7\text{ MPa}$
C	$\sigma_{zz} = 22.7\text{ MPa}$
D	$\sigma_{zz} = -67.3\text{ MPa}$
- Angolo  $\beta$  che individua la direzione dell'asse neutro:  $\beta = 76.1^\circ$ .

## 5 Torsione

### 5.1 Torsione di una sezione circolare

Sia data una trave a sezione circolare sottoposta a torsione di momento  $M_z$ , Fig.10.

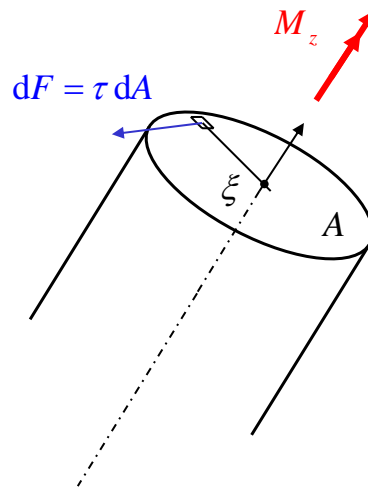


Figura 10: Stato di tensione generato da torsione.

Per equilibrare la torsione si sviluppano nel piano di sezione una distribuzione di tensioni tangenziali  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  tali che:

$$M_z = \int_A (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dA \quad (13)$$

Inoltre, per la sezione circolare, la distribuzione di tensioni  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$  gode delle seguenti due proprietà:



1.  $\tau$  è orientata in direzione tangenziale, ossia ortogonale ad  $\vec{r}$ ;
2.  $\tau$  è proporzionale alla distanza dal centro della sezione.

La distribuzione di tensioni tangenziali, in accordo con queste due proprietà è mostrata in Fig.11.

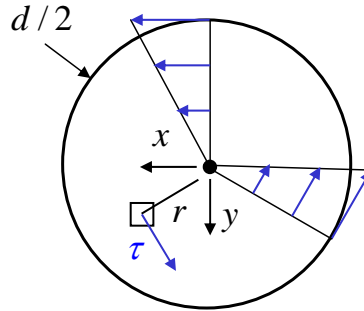


Figura 11: Direzione circonferenziale e proporzionalità al raggio delle tensioni generate dalla torsione su una sezione circolare.

È bene sottolineare che queste proprietà non valgono per le distribuzioni di tensioni generate da una sollecitazione di torsione su una sezione qualsiasi.

Sfruttando la seconda delle due proprietà è possibile scrivere:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{d/2} \quad (14)$$

ed infine sfruttando la prima proprietà e la relazione di equilibrio:

$$M_z = \int_A \tau_0 \frac{r}{d/2} r dA = \tau_0 \frac{\int_A r^2 dA}{d/2} = \tau_0 \frac{I_p}{d/2} \quad (15)$$

In cui  $\tau_0$  è la tensione tangenziale in periferia della sezione circolare (e quindi la massima, analogamente a  $\sigma_0$  nel caso di flessione) mentre  $I_p$  è il momento secondo polare dell'area della sezione.

Analogamente al caso di flessione è possibile definire il modulo di torsione (o polare) come:

$$W_p = \frac{I_p}{d/2} \quad (16)$$

in modo da ottenere direttamente il parametro di tensione  $\tau_0$ :

$$\tau_0 = \frac{M_z}{W_p} \quad (17)$$

Per ogni sezione  $I_p = I_x + I_y$ , per cui per la sezione circolare:

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4 \quad (18)$$

ed infine:

$$W_p = \frac{\pi}{16} d^3 \quad (19)$$

La particolare regolarità della distribuzione delle tensioni, generate dalla torsione, è valida anche per una sezione anulare (ad esempio la sezione di un tubo).

Anche in questo caso vale la relazione:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{d_e} \quad \text{per } r \in [d_e/2, d_i/2] \quad (20)$$

in cui  $d_e$  e  $d_i$  sono rispettivamente diametro esterno ed interno.

---

Determinare le proprietà di sezione  $I_p$  e  $W_p$  per una sezione anulare di diametri  $d_e$  e  $d_i$ .

*Suggerimento:* considerare, come in precedenza, il contributo della zona cava come negativo.



## 5.2 Torsione di sezioni a parete sottile, modello di Bredt

Si consideri una sezione generica chiusa a parete sottile, Fig.12.

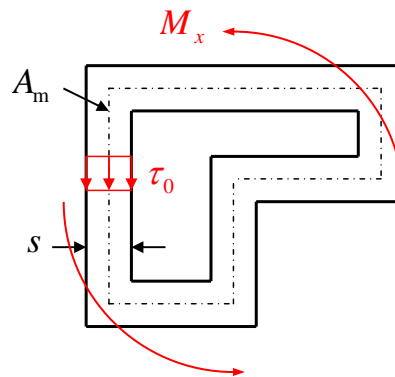


Figura 12: Generica sezione chiusa, a parete sottile.  $A_m$  è l'area racchiusa dalla linea media.

Indicando con  $A_m$  l'area racchiusa dalla linea media, ossia che passa in corrispondenza di metà spessore, il modello di Bredt (ipotizzando tensione  $\tau_0$  uniforme su ogni tratto della sezione) prevede che:

$$\tau_0 = \frac{M_x}{2A_m s} \quad (21)$$

da cui è possibile ricavare  $\tau_0$  nota la sezione e  $M_x$ .

Il modello di Bredt è generalizzabile anche per tratti a parete sottile con spessori diversi, ed inoltre è tanto più corretto quanto più la parete è effettivamente sottile rispetto alle dimensioni di ingombro della sezione.

Determinare l'errore che si commette sulla tensione massima di torsione considerando il modello di Bredt, per una sezione anulare in cui lo spessore di parete sia 1/4 del diametro esterno.



*Soluzione:*

Indicando  $\tau_{0,B}$  la tensione prevista dal modello di Bredt, e  $\tau_0$  la tensione corretta, segue che:

$$\frac{\tau_{0,B}}{\tau_0} = \frac{5}{6} = 0.833$$

## 6 Taglio, formula di Jourawski

Il modello di Jourawski permette di prevedere la distribuzione delle tensioni tangenziali generata dalla sollecitazione di taglio.

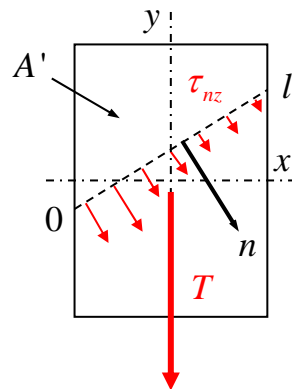


Figura 13: Sezione sollecitata a taglio.

Nell'ipotesi di azione di taglio  $T$  secondo una direzione principale vale la seguente relazione (la formula di Jourawski è generalizzabile anche per taglio  $T$  non necessariamente secondo una direzione principale della sezione):

$$\int_0^l \tau_{zn} d\xi = T \frac{S'_x}{I_x} \quad (22)$$

dove  $I_x$  è il momento *secondo* di area della sezione ( $x$  è la direzione principale ortogonale al taglio  $T$ ), mentre  $S'_x$  è il momento *primo* ma della sola *porzione*  $A'$  della sezione:

$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dS \\ S'_x &= \int_{A'} y dS \end{aligned} \quad (23)$$

Infine  $n$  è la direzione nel piano perpendicolare al percorso di integrazione.

L'eq.22 assume particolare interesse nel caso in cui su tutto il tratto  $0 - l$  la tensione  $\tau_{zn}$  si possa assumere pressoché uniforme.

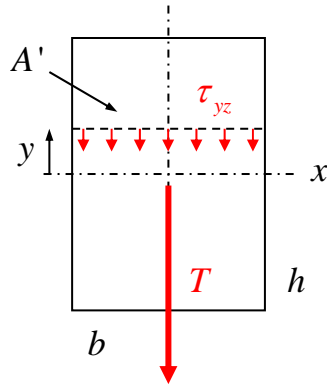


Figura 14: Sezione rettangolare, tensione  $\tau_{yz}$ .

Ad esempio, nel caso di una sezione rettangolare, considerando  $n$  orientato secondo  $y$ , si può stimare la tensione  $\tau_{yz}$  lungo una generica linea parallela all'asse  $x$ , Fig.14.

Si può quindi calcolare  $\tau_{yz}$  secondo Jourawski:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 \quad (24)$$

$$S'_x = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right)$$

quindi dalla Eq.22 si ottiene:

$$\tau_{yz} = \frac{TS'_x}{bI_x} = \frac{3}{2} \frac{T(h^2 - 4y^2)}{bh^3} \quad (25)$$

In particolare, si ha il massimo taglio in mezzeria:

$$\tau_{yz}(y = 0) = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \quad (26)$$

Da notare che il termine  $T/(bh)$  rappresenta la tensione di taglio “nominale” ossia la forza di taglio per unità di area della sezione. Quindi, la tensione massima è pari a 3/2 volte la tensione nominale.

Determinare le tensioni di taglio nelle sezioni 1 e 2 della travatura a sezione rettangolare cava di Fig.15.

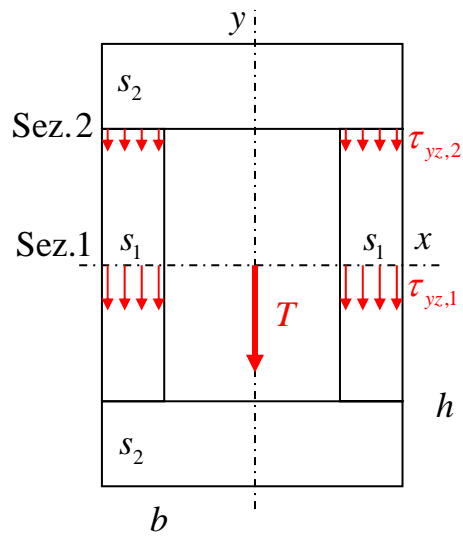


Figura 15: Sezione rettangolare cava, sollecitata a taglio.

