



Università di Pisa - Corso di Specializzazione per il Sostegno

# Laboratorio di Matematica

Scuola Secondaria

Leonardo Gnesi

Liceo "G. Marconi" di San Miniato (PI)

[leonardo.gnesi@istruzione.it](mailto:leonardo.gnesi@istruzione.it)

Marzo – Aprile 2015



# Laboratorio Euro: la conquista dell' autonomia

- L' insegnamento dell' uso del denaro si inserisce nel programma più vasto che si pone come obiettivo principale il favorire l' autonomia dell' alunno.

Può migliorare la qualità della vita di una persona.

...anche se il concetto di normalità e di autonomia sono piuttosto relativi:

*es. quanti “normali” non sono “autonomi” nell' acquisto di prodotti bancari, assicurativi, immobiliari, ...*



# Laboratorio Euro: la conquista dell' autonomia

- D' altra parte, l' alunno sente che lavorare con il denaro è concretamente utile per le proprie attività quotidiane (fare acquisti) e favorisce l' acquisizione di abilità sociali (interagire con il mondo esterno).
- I compiti da eseguire sono naturalmente calibrati sulle proprie capacità, e sulle giuste motivazioni  
*risolvere un problema di aritmetica non sarà mai come comprare del pane (problema di 1° livello!)*
- Tuttavia l' uso del denaro è un'abilità non difficile, ma complessa.



# Laboratorio Euro: la conquista dell' autonomia

- Esiste naturalmente un problema di fondo: l'alunno ha i necessari prerequisiti (matematici e non) per affrontare un tale percorso?

Si tratta in realtà di cambiare punto di vista: la didattica funzionale all' autonomia, dal carattere fortemente operativo, può semmai produrre un miglioramento nelle abilità di base matematiche (e non) quali il concetto di numero, la notazione posizionale, le quattro operazioni, il problem solving (e non solo...)

*Del resto, i commercianti di una volta ...*



# Laboratorio Euro: la conquista dell' autonomia

- La matematica è l' ambiente naturale in cui collocare queste attività, che offrono un supporto concreto per la visualizzazione di concetti matematici altrimenti astratti.
- Si tratta di un percorso alternativo di matematica, non di una perdita di tempo!
- Quando cominciare: il prima possibile, anche con piccoli interventi quotidiani, magari collocati al termine di attività più astratte, proposti come rinforzo/premio.

# Prerequisiti trasversali

- Per renderci conto di cosa significhi fare uso del denaro in un'interazione di acquisto, dobbiamo esaminare tale situazione con la “lente di ingrandimento”, frammentando tutte le singole abilità coinvolte.
- Sono prerequisiti, ma vengono rafforzati nelle attività!
- **1. La motivazione:**

generalmente, c'è. Anzi, ci sono: sia *intrinseca* che *estrinseca*. Se non c'è, e non si riesce ad attivare: non è il momento di parlare di euro.

# Prerequisiti trasversali

- **2. L' attenzione:**

Atteggiamento di raccolta rispetto agli stimoli esterni.

Fortunatamente l' interazione di pagamento richiede uno sforzo di attenzione piuttosto impegnativo ma in tempi piuttosto limitati. Meglio iniziare le attività in ambienti senza distrattori; proseguire poi in piccole realtà e progressivamente e solo eventualmente arrivare nel caos di un supermercato.

# Prerequisiti trasversali

- **3. La concentrazione:**

Capacità di gestire processi mentali interiori.

Il carico di concentrazione può eccedere spesso le nostre capacità, e può essere alleggerito solo automatizzando i processi.

Quindi: ripetizione meccanica di esercizi. Ma questo non produce abilità, ricordiamolo. Dovranno essere proposte attività ludiche/problematiche una volta stabiliti gli automatismi.



# Prerequisiti trasversali

- **4. Reagire in un tempo limitato:**

In una situazione di acquisto, il tempo a disposizione è sempre limitato: gli altri clienti sono di fretta e il negoziante tende naturalmente a stringere i tempi.

Rischio: ansia, rabbia, e conseguente calo di concentrazione.

Quindi: porre da subito attenzione al tempo impiegato a rispondere.

# Prerequisiti trasversali

- **5. Planning: organizzare le proprie azioni**

Coordinamento dei processi mentali per il conseguimento di un risultato.

Fortunatamente, nell' uso del denaro le azioni seguono sempre lo stesso ordine, salvo imprevisti!

Quindi: interiorizzare un numero limitato di attività routinarie da richiamare.

# Prerequisiti trasversali

- **6. Abilità comunicative:**

L' interazione per l' acquisto è un vero e proprio *scambio* comunicativo, in cui si deve regolare il proprio intervento sulla base dell' informazione fornita dall' interlocutore.

Fortunatamente non sono molti i copioni possibili: si possono provare a memorizzare.

# Prerequisiti trasversali

- **7. Autostima e senso di autoefficacia:**

Fare una cosa “da grandi” può essere uno stimolo ma anche generare ansia.

Quindi: avere cura che le esperienze che fa durante le attività siano positive.

Se riusciamo in questo intento, avremo anche dato un piccolo ma significativo contributo alla sua costruzione dell' immagine di sé.



# Prerequisiti trasversali

- **8. Abilità fino-motorie**
- **9. Mettere in atto discriminazione percettiva**

Riconoscere e distinguere le banconote: forma, consistenza, colore, codici iconico, numerico e verbale.

# Prerequisiti trasversali

- **10. Memoria a breve e lungo termine:**

MBT richiesta come memoria di lavoro: nel conteggio, nel ricordo del prezzo da raggiungere...

MLT per conservare le nozioni fornite nel corso.

- **11. Prerequisiti di livello superiore:**

Problem solving, generalizzare apprendimenti, automonitoraggio, ... richiesti nelle fasi più avanzate del percorso, come un “in più”.

# Prerequisiti matematici

- **1. Il concetto di quantità:**

Quantità: idea di numero nell' aspetto cardinale.

Per quanto elementare si possa ridurre il percorso sull' uso dell' euro, questo concetto è imprescindibile.

- **2. Distinguere quantità maggiori/minori:**

Ovvero, l'idea di numero nell' aspetto ordinale.

Per quanto elementare si possa ridurre il percorso sull' uso dell' euro, anche questo concetto è imprescindibile.

# Prerequisiti matematici

- **3. Seriare:**

Disporre diverse quantità in sequenza dalla più piccola alla più grande.

Per un approccio minimo può essere sufficiente seriare magari tre/quattro quantità anche distanziate tra loro.

- **4. Conoscere i numeri fino a 100:**

Inteso come filastrocca dei numeri, lettura e scrittura.



# Prerequisiti matematici

- I seguenti prerequisiti non sono necessari per partire, e vengono fortemente incentivati nello svolgimento del programma.
- **5. Distinguere unità di primo e secondo ordine:**  
Ovvero: distinguere euro/centesimi.
- **6. Concetto di costanza nella variazione:**  
E' l'idea di operazione come uguaglianza.
- **7. Eseguire semplici addizioni;**
- **8. Numerare per 2 e per 5.**



# Indicazioni metodologiche

- Nel progettare un percorso con alunni disabili, l'indicazione principale è l'anarchismo metodologico.
- Data la varietà delle situazioni e la loro mutevolezza nel tempo, sarebbe assurdo pensare a una ricetta preconfezionata, mentre risulta indispensabile possedere un repertorio di risorse cui attingere in un'ottica di accomodamento a valle.



# Indicazioni metodologiche

- Lavorando con alunni disabili capita spesso di arrivare a situazioni di blocco, in cui sembra di non riuscire più a procedere oltre un certo livello di apprendimento.
- E' in queste situazioni che è preferibile attingere dalle metodologie indicate in seguito, che hanno il ruolo di enfatizzare lo stimolo, fornire occasioni di successo ed evitare la frustrazione.

# Indicazioni metodologiche

- **1. Rinforzi:** gratifica per l' alunno. Può essere tangibile (l' oggetto stesso), sociale (esprimere la propria approvazione), simbolico (attribuire un punteggio/voto), token economy (dare un “gettone” non immediatamente fruibile, ma che potrà essere scambiato in seguito), dinamico (permettere di alzarsi, fare una passeggiata,..), negativo (sottrarlo a una situazione sgradita).

Il rinforzo deve essere immediato.

- **2. Aiuti (prompts):** uso di suggerimenti verbali, gestuali, visivi, fisici per favorire l' emissione della risposta corretta.



# Indicazioni metodologiche

- **3. Modellamento (modeling):** presentare un modello da imitare.
- **4. Modellaggio (shaping):** rinforzare i comportamenti simili a quello voluto, ma non ancora ottenuto, per arrivare al comportamento finale con approssimazioni successive.

# Indicazioni metodologiche

- **5. Concatenamento delle risposte (chaining):**  
Scindere comportamenti complessi in altri più semplici da completare gradualmente.

*es. - richiesta della merce*

*- richiesta del prezzo*

*- corresponsione del denaro*

*- controllo del resto*

– Concatenamento anterogrado e retrogrado.

- **6. Tecnica dell' alternanza:** alternare esercizi che l' alunno sa fare bene con altri ad alto rischio di errore. 22 / 58

# Indicazioni metodologiche

- **7. Iterazione della risposta (metodo del bis):** quando l'alunno risponde spontaneamente ad un esercizio ad alto rischio di errore, farlo eseguire ulteriori volte.
- **8. Ripetizione dello stimolo:** soprattutto per alunni impulsivi e con deficit di attenzione
- **9. Evidenziamento (highlighting):** esagerare una caratteristica dello stimolo utile per discriminare cosa apprendere.



# Indicazioni metodologiche

- **10. Aiuto attenuato (fading):** fornire un aiuto inizialmente e attenuarlo gradualmente.
- **11. Aiuto differito:** in caso di errore, l' insegnante corregge e se l' errore si ripresenta, fornire aiuto aspettando almeno 4 secondi.
- **12. Comunicazione totale:** usare più codici allo stesso tempo: visivo, lessicale, grafico, drammatizzazione, ...



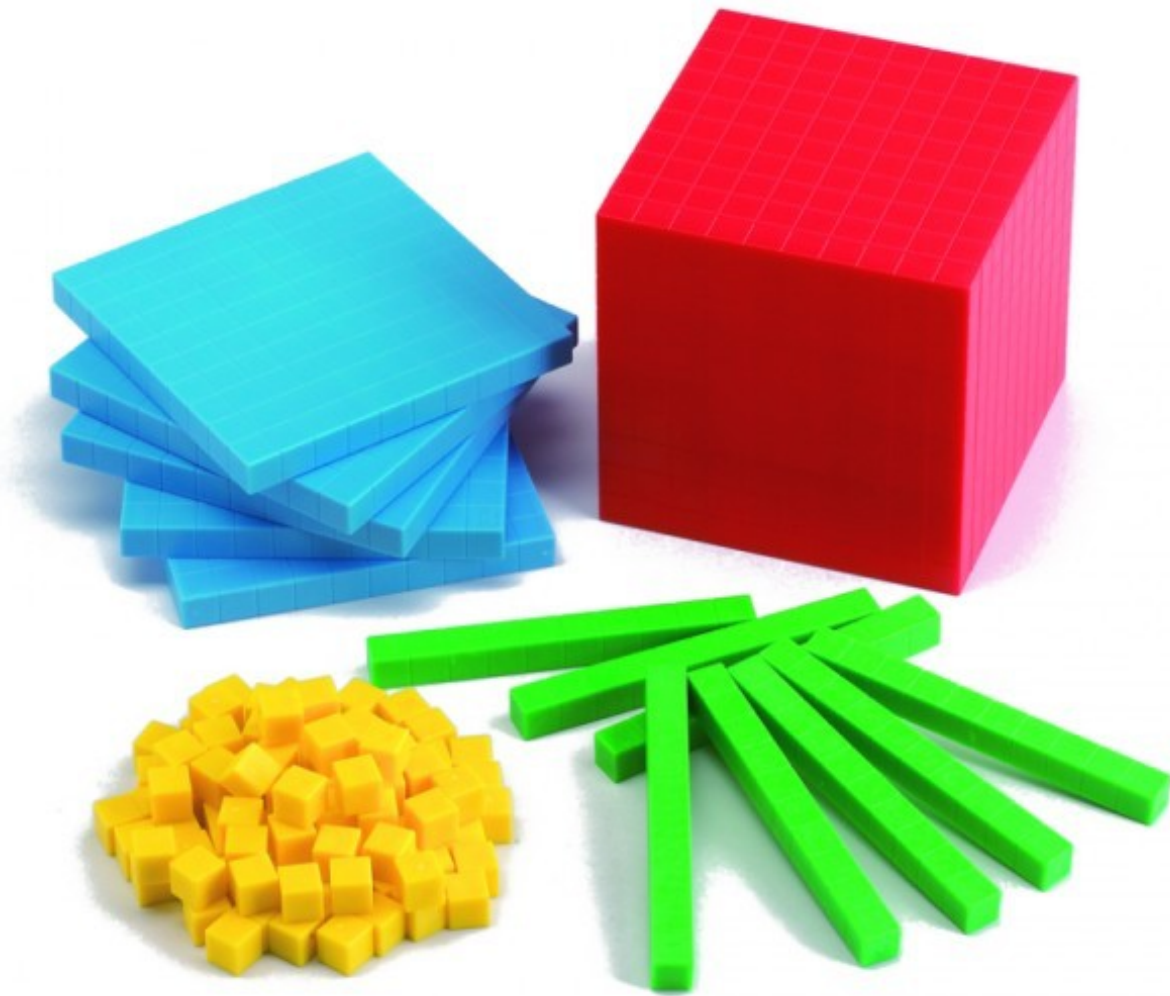
# Indicazioni metodologiche

- I contesti di apprendimento (in ordine di comparsa)
  1. Lavoro individualizzato in aula
  2. Lavoro di coppia (role play/tutoring)
  3. Lavoro in piccoli gruppi
  4. Dimostrazione al gruppo classe
  5. Esperienze di compravendita all' interno della scuola
  6. Esperienze di compravendita all' esterno
  7. Esperienze di compravendita con i genitori

# Materiali di lavoro

- Nell' uso dei facilitatori, si seguono le tre fasi della simbolizzazione teorizzate da Bruner: **concreta, iconica, simbolica.**
- Facilitatori **concreti**:
  - Materiale strutturato: blocchi logici, regoli, pallottolieri ma soprattutto il materiale multibase “gioco del cambio”.
  - Materiale vario: contachilometri meccanico, registratore di cassa,...
  - Oggetti per le simulazioni: fustini vuoti, scatole vuote, giocattoli, ...





# Materiali di lavoro

- Facilitatori **iconici**:
  - Fac simile di soldi;
  - Ritagli di giornali, volantini (accattivanti, hanno prezzi autentici, aggiornati, vari, completi);
- Facilitatori **simbolici**:
  - Immagini simboliche per le monete (tipo cerchietti colorati)
  - Quantitativi di denaro espressi con cifre

# Materiali di lavoro

- Come procedere:
  1. presentare le attività in 3 fasi:
    - concreta → l'alunno sperimenta concretamente il comportamento, manipolando il materiale
    - iconica → l'alunno disegna/incolla sul quaderno immagini e fac simile per rappresentare la situazione
    - simbolica → sotto le immagini trascrivere cifre in euro, e si ripete l'attività con le cifre in euro.

# Materiali di lavoro

- Come procedere:
  2. Acquisizione di un automatismo con la ripetizione di esercizi meccanici.
  3. Passare dall' automatismo all' uso spontaneo con attività (prevalentemente ludiche) che lo distolgano dalla meccanica.
  4. Uso spontaneo di ciò che si è appreso, in una situazione di acquisto.

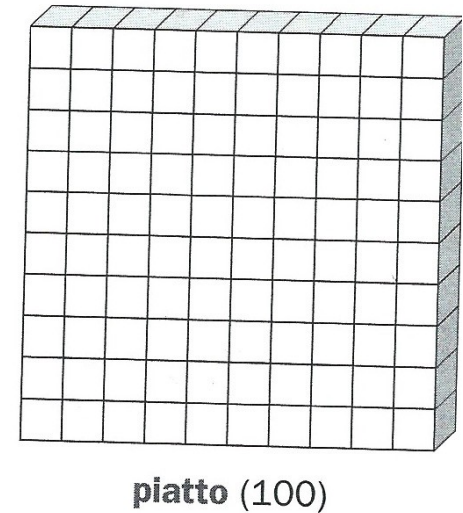
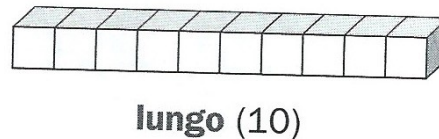
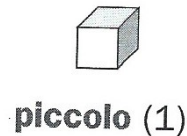


# Lavorare con unità di due ordini diversi

- Non siamo tradizionalmente preparati ad affrontare il problema dei decimi e dei centesimi nelle monete: nella lira non c'erano.
- Ma i nostri alunni non hanno mai conosciuto la lira.
- E gli alunni inglesi,... tedeschi,... ?
- L' idea è quella di bypassare decimi e centesimi, e parlare di unità di due ordini diversi: inferiore (centesimi e loro multipli fino a 99) e superiore (l' euro e i suoi multipli).



# Lavorare con unità di due ordini diversi



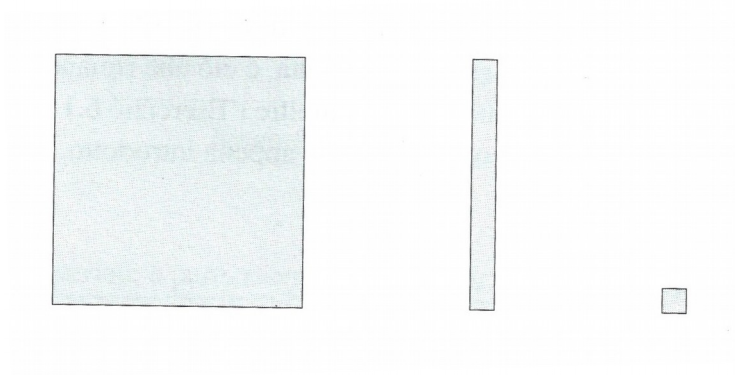
- Deve essere ben chiaro che non si tratta di denaro vero, ma di materiale esemplificativo. *Per esempio denaro del pianeta di Eurolandia*
- Non abbiamo fretta di passare ai fac simile!

# Lavorare con unità di due ordini diversi

- Osservare i “piccoli” (PC), i “lunghi” (L) e i “piatti” (P); controllare le loro mutue relazioni.
- Introdurre la terminologia di Eurolandia e realtà:
  - 1PC = 1 eurocent = 1 centesimo
  - 1 L = 10 eurocent = 1 decimo
  - 1 P = 100 eurocent = 1 euro
- *es. fornire materiale strutturato e far contare le somme, tipo:*
  - 2L (20 centesimi); 1P 3PC (1 euro e 3 centesimi)...*

# Lavorare con unità di due ordini diversi

- Per rappresentare sul quaderno, utilizzare una notazione simbolica tipo:





# Lavorare con unità di due ordini diversi

- Per acquisire il concetto di **cambio** in modo sistematico: il gioco della banca
  1. *alunno cliente / insegnante cassiere: l' alunno chiede di poter cambiare “moneta” tipo 1 euro in centesimi. Richieste impossibili da parte sua e tentativi di imbroglio da parte nostra.*
  2. *alunno cassiere / insegnante (o altro alunno) cliente: ...*
- L' uso del materiale strutturato permette una verifica immediata per sovrapposizione.
- Annotare sul quaderno con la notazione simbolica.

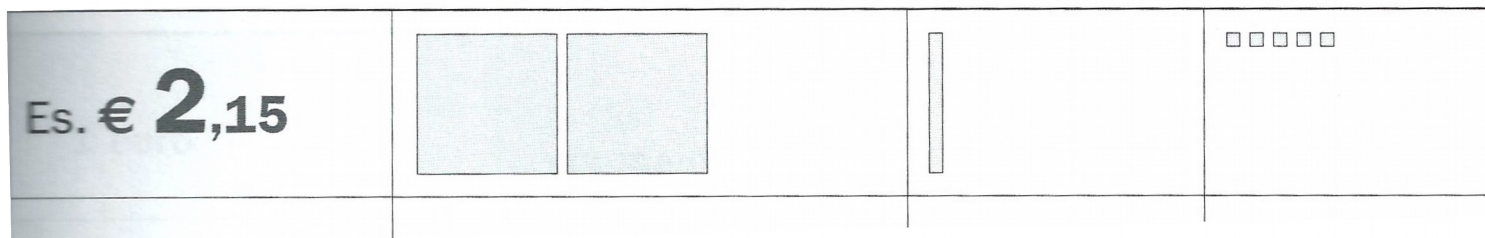
# Lavorare con unità di due ordini diversi

- **Leggere e scrivere** prezzi in euro. Lavorare con materiale strutturato (volantini): imitare sul quaderno la notazione dei caratteri: gli euro sono grandi e i centesimi piccoli!
- Poi scrivere anche in lettere.



# Lavorare con unità di due ordini diversi

- Imparare a **corrispondere** somme di “denaro” richieste, estraendole dal suo portamonete.
- es. alla richiesta di fornire € 2,34 mostrare che prima si contano gli “euro” (2), poi i decimi (3), poi i centesimi (4).
- Per ora non si propongono cambi alla decina successiva (tpo 14 centesimi in pezzi da 1).
- Si passa poi alla rappresentazione simbolica.



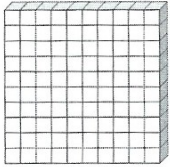


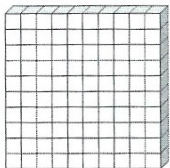


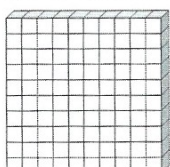




# Lavorare con unità di due ordini diversi

- **Contare** denaro in disordine:
- 1. Suddividere le “monete” per tipo, per esempio una somma assegnata in disordine, anche mediante gioco.
- 2. Riempire una griglia come questa:






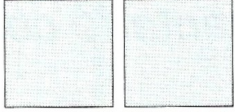


# Lavorare con unità di due ordini diversi

1 euro		10 eurocent		1 eurocent	
2 euro		20 eurocent		2 eurocent	
3 euro		30 eurocent		3 eurocent	
4 euro		40 eurocent		4 eurocent	
5 euro		50 eurocent		5 eurocent	
6 euro		60 eurocent		6 eurocent	



# Lavorare con unità di due ordini diversi

- Confrontare somme di denaro in disordine:  
*es. nel confrontare 3 “euro” e 1,16 “euro” può sembrare che sia maggiore la seconda per la presenza del 16.*
- Ricorrere alla sovrapposizione, possibile col materiale multibase.
- In una seconda fase, passare al simbolico:

€ <b>1,12</b>	<input type="checkbox"/>			
€ <b>2,12</b>	<input checked="" type="checkbox"/>			



# Lavorare con unità di due ordini diversi

- A questo punto si può provare a confrontare prezzi in euro (reali), seguendo una procedura tipo:
  1. confronta gli euro;
  2. confronta i decimi;
  3. confronta i centesimi.
- Compresa e verificata la procedura, confrontare materiale pubblicitario tratto da volantini: indicare il più costoso di una coppia; ordinare a seconda del prezzo...



# Lavorare con unità di due ordini diversi

- Ora il passo è breve per il punto di approdo:

**Giudicare** se il denaro posseduto è sufficiente per un certo acquisto: *i soldi richiesti sono di più di quelli posseduti, non si può fare l'acquisto.*

*es. volantino alla mano, rispondere se bastano ...€ per acquistare qualcosa*

# Lavorare con unità di due ordini diversi

- **Pagare per eccesso:**

*avremo cura di fornire un numero basso di unità di ordine inferiore e dando un più cospicuo numero di “euro”. Si confronta il materiale necessario per pagare e quello usato effettivamente e si ricava l' eccesso.*

*es. pagare 6,20”€” avendo a disposizione 7,10”€” :*

Inizialmente faremo aggiungere una moneta grande in sostituzione delle piccole necessarie; solo in seguito si cercherà di avvicinarsi il più possibile alla cifra da pagare (facilita il controllo del resto).



# Fare scattare il cambio all' unità successiva

- Abbiamo già visto l' operazione in cui un unità grande viene scambiata in unità più piccole.
- Il cambio *inverso*, da unità piccole a unità grandi, è utilizzato meno frequentemente nelle compravendite. Si può affrontare analogamente: materiale concreto, materiale iconico, materiale simbolico.
- Per evidenziare il cambio cui si arriva aggiungendo unità successive, si può rispolverare l' abaco, o un vecchio contachilometri analogico.
- Porre attenzione ai “numeri magici”, come 1,99 €.

# Conoscere monete e banconote

- Una volta stabilizzate le abilità esposte, è importante passare in modo sistematico all' uso dei fac-simile.
- Il passaggio può essere effettuato mediante *fading* preparando fac simile di monete che da un lato abbiano la rappresentazione simbolica (PC, L, P), e insistendo sulla corrispondenza col materiale concreto.
- Possibili regressioni: sono gli indizi di un' attività di astrazione che sta avvenendo.
- Proporre un eventuale programma di appaiamenti per il riconoscimento delle monete.



# Conoscere monete e banconote

- Nominare i soldi: basta leggere il numero, oppure basandoci sul colore o la grandezza.
- A questo punto si possono riproporre gli esercizi e le attività fatte con il materiale concreto: comporre somme, fare cambi, confrontare somme, pagare per eccesso con/senza avvicendamento.



# Banconote e monete di valore diverso dall' unità.

- Sono richieste abilità matematiche più articolate rispetto ai casi precedenti.
- Importante almeno per il controllo; ma anche per le ricadute in matematica.
- Riconoscimento delle monete e delle banconote.
- Imparare a fare progressioni a salti di 5 e di 2; comporre la decina o il centinaio.



# Controllare il resto

- E' l' abilità più complessa all' interno di un percorso sull' uso del denaro. Essa richiede tutte le capacità precedentemente sviluppate.
- Aspetto destabilizzante del resto: il negoziante dà soldi al compratore. Potrebbe sembrare di arricchirsi!
- Può essere utile una preliminare attività sulla necessità di un resto, fatta con il materiale strutturato: *es. pagare 2,30 “€” fornendo 3,00 “€”, e osservando -sempre mediante sovrapposizione- che quanto dato è più del prezzo da pagare.*



# Controllare il resto

- Per controllare il resto, è necessario saper svolgere in prima persona il compito stesso. Quindi servono attività in cui l' alunno ricopra il ruolo di cassiere.
- Sono attuabili due strategie di controllo che sfruttano due abilità cognitive distinte:
  - Strategia *backward* : memoria
  - Strategia *forward* : numerazione

# Controllare il resto

- La strategia *backward* si basa sull' abbinamento automatico di numeri che insieme formano la decina (es.  $1+9$ ,  $2+8$ , ...). A seconda dello stile mnemonico dell' alunno si propongono attività per la memorizzazione di coppie:
  - stile visivo → regoli colorati che formano i “muretti”;
  - stile verbale → filastrocca (*l' uno ha il nove e non si muove, il due con l' otto ci dan sotto, il tre col sette sol si mette, il quattro e il sei amici miei, il cinque sta col suo fratello e vuol bene solo a quello*).

- Rafforzare con attività tipo

PARTI DALLA SOMMA	RAPPRESENTALA	AGGIUNGI L'«AMICO» DEL 10	CHE SOMMA OTTIENI?
Es. € <b>1,03</b>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/> <input type="text"/>	<del>€ 2,00</del> 1,10

# Controllare il resto

- La strategia *forward* si basa sull' aggiungere tante unità di un certo ordine quante ne sono necessarie per raggiungere una somma data a partire da una certa cifra.

*es. se ho dato 5,00 € per pagare 4,30 € parto da quest' ultima somma e conto tanti decimi quanti sono necessari per arrivare a 5,00 €.*

# Controllare il resto

- Il metodo ottimale per il controllo del resto combina le due strategie mostrate:

*supponiamo di dover pagare 12,15 € e di aver dato 13,00 €*

*partendo dall' ultima cifra delle due quantità, osserviamo che il 5 deve essere trasformato in 0  $\rightarrow$  (backward) serve aggiungere un 5. Quindi si prendono 5 monete da 1 centesimo e le aggiungiamo (forward) fino ad arrivare a 12,20. Ora si guarda la cifra dei decimi:*

*2  $\rightarrow$  (b) 8 decimi  $\rightarrow$  (f) 13. Quindi il resto è 85 centesimi.*

# Controllare il resto

- Il metodo sembra macchinoso, ma si presta ad uno sviluppo piuttosto meccanico.
- Non funziona quando si debba arrivare a cifre non-zero: per es. nel caso di 15 € corrisposti per arrivare a 11 €.

In questi casi funziona solo la strategia forward.

*es. attività: esercizi coi facsimile, esercizi sul quaderno, ma anche far svolgere all' alunno il ruolo di negoziante (per es. mercatino scolastico).*

# Gestire una situazione di acquisto

- Questo aspetto può essere trascurato nei casi più gravi, ma diventa l'abilità più complessa nei casi più *borderline*. In questi casi non ci si può accontentare di fac simile, bisogna mettere in pratica un acquisto in una situazione reale.
- Cominciamo con una simulazione, in cui si debba organizzare gli acquisti per una festa ... è necessario compilare una lista con articoli, costi unitari, totali parziali e totale finale.





# Gestire una situazione di acquisto

- Trovare il negozio giusto per un certo articolo;
- Decidere su un acquisto in confronto a un altro;
- Valutare il prezzo in relazione alla necessità;
- Rimandare un acquisto;
- Interagire con il negoziante;
- Gestire imprevisti.



# Bibliografia incompleta

[1] M. Malagoli “*Laboratorio Euro*”, Erickson, Trento (2001)